Entrenamiento matemático. Hoja AL5

EU Informática UPM

Apellidos:

Nombre:

Grupo: $\square$

Dpto. MA

GIEMATIC [1]

Matrices II (Álgebra)

a) Dadas las matrices siguientes (A, B, C y D)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ y \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Decir si las operaciones indicadas se pueden realizar o no:

$A + B$ $\square$ $\quad A \cdot B$ $\square$ $\quad C^t$ $\square$ $\quad C \cdot D$ $\square$

2. Para las que sí se pueda, realizar la operación:

b) Indicar con 0, 1 ó 2 si las siguientes matrices no son escalonadas (0), son escalonadas pero no reducidas (1) o son escalonadas reducidas (2):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \square \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \square \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \square \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \square$$

c) Escalonar las siguientes matrices, utilizando el algoritmo de Gauss, e indicando las operaciones elementales efectuadas en cada paso:

1. Con coeficientes en $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

2. Con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

[1] Grupo de Innovación Educativa GIEMATIC: José J. Carreño, Jesús García, Ana Lías, Ángeles Martínez.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

d) Las siguientes matrices ampliadas están asociadas a sistemas de ecuaciones en $\mathbb{R}$. Utilizar el teorema de Roché-Frobenius para decir qué tipo de sistema es (incompatible, compatible determinado/indeterminado). En caso de ser compatible, resolverlo.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

e) Estudiar si los siguientes pares de matrices son inversas:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4/5 & -3 \\ -1/5 & 2 \end{pmatrix}$:

b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$:

f) Decidir si la matriz $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ tiene inversa en $\mathbb{Z}_3$. En caso afirmativo, calcularla.

g) Piensa y resuelve:

1. Dadas $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -12 & -5 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, resolver la ecuación matricial $A \cdot X = B$.

2. Obtener el polinomio de grado 4 que verifica todas las condiciones siguientes:

1) Su término independiente es 0 y el de mayor grado tiene coeficiente 1.
2) Es divisible por $x - 2$.
3) El resto de dividirlo entre $x - 3$ vale 15.
4) Su valor numérico en $x = -1$ es -9.

3. Se quieren repartir 4,400 millones de euros entre 4 universidades, A, B, C y D. La universidad A recibe el doble que las universidades B y C juntas. Lo que recibe B es el triple de lo que reciben C y D juntas. C y D reciben lo mismo. ¿Cuánto recibe cada universidad?