EU Informática

UPM

Dpto. MA

HOJAS DE ENTRENAMIENTO MATEMÁTICO

Grupo de innovación educativa: GIEMATIC

José Juan Carreño Carreño
Jesús García López De Lacalle
Ana Lías Quintero
Ángeles Martínez Sánchez

Departamento de Matemática Aplicada
Escuela Universitaria de Informática
Universidad Politécnica de Madrid

Índice

Hoja 1: Operaciones aritméticas (Básicos)

1. Con números enteros

a) Calcula:

a) $2\,(15-7)^2 - 4^3 =$

b) $3 - 2(2^4 - 3\cdot 5)^5 =$

c) $(3\cdot 5^2 - 2^3\cdot 5)\,/\,7 =$

d) $8\,(2-5)^3\,/\,6^2 =$

b) Efectúa y simplifica descomponiendo como en el ejemplo siguiente:

$$\frac{15}{21}\cdot\frac{7}{25} = \frac{15\cdot 7}{21\cdot 25} = \frac{5\cdot 3\cdot 7}{3\cdot 7\cdot 5\cdot 5} = \frac{1}{5}$$

a) $\frac{3}{5}\cdot\frac{20}{21} =$

b) $\frac{6}{25}\cdot\frac{5}{18} =$

c) $\frac{12}{7}\cdot\frac{35}{36} =$

d) $\frac{9}{16}\cdot\frac{20}{27} =$

e) $\frac{13}{2}\cdot\frac{84}{65} =$

f) $\frac{90}{35}\cdot\frac{14}{36} =$

2. Con fracciones:

a) Calcula paso a paso simplificando hasta obtener una fracción irreducible

a) $2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} =$

b) $-\frac{4}{3} - (\frac{1}{3} + \frac{1}{5}) =$

c) $\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{2} + \frac{5}{4} - (\frac{15}{4} + \frac{1}{5}\,/\,\frac{4}{35}) =$

d) $3-\frac{2}{3}\left(1-\cdot\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{8}(-2)=$

e) $\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}\right)^2=$

f) $\frac{5}{2}-\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}/\left[2-\frac{1}{2}\left(1+\frac{5}{3}\right)\right]=$

b) Reduce y simplifica el resultado hasta obtener una fracción irreducible

1. $\dfrac{3+\frac{1}{2}}{7-\frac{3}{2}}=$

2. $\dfrac{\frac{1}{4}-\frac{2}{3}}{\frac{5}{6}-\frac{7}{12}}=$

3. $\dfrac{\frac{7}{8}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{1}{5}-\frac{1}{2}}=$

3. Potencias y raíces

a) Calcula

a) $(-3)^3=$ *b)* $(-2)^4=$

c) $(-2)^{-3}=$ *d)* $-3^2=$

e) $(-1/2)^3=$ *f)* $(4/3)^0=$

g) $(-\frac{1}{2})^{-2}=$ *h)* $(-5)^2\,(-5)\,(-5)^0=$

b) Expresa como una potencia única y positiva

a) $(2^3)^{-5}=$ *b)* $(4^{-3}\cdot 4^2)^3=$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}/\left(\frac{3}{4}\right)^2=$ *d)* $\dfrac{2^5\cdot 2^{-7}}{2^{-4}}=$

e) $\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}\right]^3 5^{-2}=$ *f)* $\left(\frac{1}{2}\right)^3/\left(\frac{1}{4}\right)^2=$

c) Expresa como una potencia única

a) $\left[\left(\frac{7}{2}-2\right)\right]^{-3}=$ *b)* $\left[\left(\frac{5}{2}+2\right)\right]^{-3}3^{6}=$

c) $\left[\left(\frac{1}{2}+1\right)^{-1}\right]^{3}=$ *d)* $\left(\frac{3}{2}-1\right)^{-3}/\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=$

d) Simplifica y expresa como producto de potencias

a) $\dfrac{6^4\cdot 8^2}{3^2\cdot 2^3\cdot 2^4}=$

b) $\dfrac{15^2\cdot 4^2}{12^2\cdot 10}=$

c) $\dfrac{4^3\cdot 2^{-5}}{16}=$

d) $\dfrac{2^5\cdot 3^2\cdot 4^{-1}}{2^3\cdot 9^{-1}}=$

e) Simplifica hasta obtener una expresión con exponentes positivos en a y b

1. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-4}\cdot\frac{a^3}{b^2}=$

2. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}\cdot\left(a^{-1}\right)^{-2}=$

3. $\left(\frac{1}{a}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{-2}=$

4. $\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{-3}\right]^{-1}(a^{-1}\,b)^{-2}=$

f) Calcula

a) $\sqrt[4]{16}=$ *b)* $\sqrt{\frac{16}{25}}=$ *c)* $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=$

d) $\sqrt[5]{-1}=$ *e)* $\sqrt[3]{216}=$ *f)* $\sqrt[7]{128}=$

4. Piensa y resuelve:

a) Una mezcla de cereales está compuesta por 5/7 de trigo, 9/25 de avena y el resto de arroz. ¿Que parte de arroz tiene la mezcla? En 600 gr. de mezcla, ¿cuántos gramos de arroz hay?

b) De los 300 libros de una biblioteca, 1/6 son de poesía; 180 son novelas y el resto, de historia. ¿Qué fracción representan los libros de historia?

Hoja 2: Expresiones algebraicas (Básicos)

1. Potencias y raíces:

a) Expresa como una única potencia:

a) $x^2 \cdot x^3 =$
b) $(x^2)^{-1} =$
c) $x^{-2} \cdot y^{-2} =$

b) Determina si son ciertas las siguientes igualdades:

a) $(a-b)^2 = a^2 - b^2$
b) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
c) $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$
d) $a^{(n \cdot m)} = a^n \cdot a^m$
e) $a^{(n+m)} = a^n \cdot a^m$

c) Expresa como una única raíz:

a) $\sqrt[4]{x^2} =$
b) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{x}} =$
c) $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[2]{x} =$
d) $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[2]{x} =$
e) $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} =$

2. Desarrolla las siguientes expresiones:

a) $(a+b)^2 =$

b) $(a+b)(a-b) =$

c) $(a+b)^3 =$

d) $\left(x-\sqrt{2}\right) \cdot \left(x+\sqrt{2}\right) =$

e) $(x-1)^2 =$

f) $(3x-2y)^2 =$

g) $(2x+\sqrt{2})^2 =$

h) $\left(\frac{x}{2} - 3\right)^3 =$

3. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $(x-2)^2 + (x-2)\cdot(x+2) =$

b) $(x+1) - (x^2-1) =$

c) $\dfrac{x}{x^2+3x} =$

d) $\dfrac{x^3+x^2}{x^3} =$

e) $\dfrac{x-3}{2x-6} =$

f) $\dfrac{\frac{4x+4}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}} =$

g) $\dfrac{\frac{x^2+1}{x}}{\frac{x^2-1}{x}} \cdot (x-1) =$

h) $\dfrac{\frac{a^3+a}{a^2-a}}{\frac{a^3-a^2}{a^2-2a+1}} =$

4. Factoriales y números combinatorios:

a) Simplifica las siguientes expresiones:

a) $4! =$
b) $5! - 4! =$
c) $(3!)! =$
d) $0! =$
e) $\dbinom{6}{2} = \dfrac{6!}{2!\cdot(6-2)!} =$
f) $\dbinom{7}{3} = \dfrac{7!}{3!\cdot(7-3)!} =$

b) Determina si son ciertas las siguientes igualdades:

a) $\dfrac{(n+1)!}{n!} = n+1$

b) $\dbinom{6}{2} + \dbinom{6}{3} = \dbinom{7}{2}$

c) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

5. Evaluación de funciones:

a) Si $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ obtener, si existen, los siguientes valores:

a) $f(0) =$
b) $f(2) =$
c) $f(a) =$
d) $f(y-1) =$
e) $f\left(\dfrac{1}{x}\right) =$
f) $f(1) =$

6. Piensa y resuelve:

a) A la vista de las siguientes igualdades obtener la expresión general para el índice n:

Indice			
1	1	$=$	1
2	$1+3$	$=$	4
3	$1+3+5$	$=$	9
4	$1+3+5+7$	$=$	16
$\vdots$	$\vdots$	$=$	$\vdots$
n			

b) Un algoritmo mezcla dos listas de nombres distintos, L_1 y L_2, poniendo en una nueva lista L los nombres de L_1 y L_2, sin repeticiones. En primer lugar, incluye en L todos los nombres de L_1. A continuación compara cada uno de los nombres de L_2 con todos los de L_1, insertando en L los nombres de L_2 que no están en L_1.

Si llamamos n y m a los tamaños de las listas L_1 y L_2 respectivamente y $f(n,m)$ al número de comparaciones que realiza el algoritmo, determinar $f(n,m)$:

$f(n,m) =$

Si en L_1 y L_2 hay k nombres repetidos y llamamos $g(n,m,k)$ al número de inserciones en la lista L que realiza el algoritmo, determinar $g(n,m,k)$:

$g(n,m,k) =$

Hoja 3: Operaciones aritméticas y expresiones algebraicas (Básicos)

1. Con números enteros

a) Simplifica:

a) $(-3)^4\,(-3)^2 =$

b) $(-2)^6\,(-2)^3 =$

c) $(-2)^5\,/2^2 =$

d) $\left(5^{-3}\right)^{-2} =$

e) $4\,(21-5)^2 =$

f) $(3\cdot 4^2 - 2^3\cdot 3)\,/\,15 =$

g) $3\,(2^5-5)^5 =$

h) $16\,(2-5)^4\,/\,6^{-4} =$

b) Simplifica hasta obtener una única potencia:

a) $\dfrac{a^4\cdot a^{-3}}{\left(a^5\right)^{-1}} =$

b) $a^{-5}\left(a^6\right)^2 =$

c) $\dfrac{\left(a^5\right)^{-2}\cdot a}{a^7} =$

d) $x^{-2}\left(x^5\right)^{-4}x =$

e) $\dfrac{x\cdot\left(x^2\right)^{-2}}{\left(x^4\right)^{-2}\cdot x^5} =$

c) Simplifica el resultado hasta obtener una fracción irreducible

a) $\dfrac{2}{5}/\left(\dfrac{2}{5}-1\right)^2 =$

b) $\left(1-(\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{3})\right)^2/\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{5}{6}\right) =$

c) $\dfrac{4}{7}\cdot\left(\dfrac{5}{25}+1\right) =$

d) $\dfrac{\dfrac{4}{5}+3-\dfrac{7}{15}}{\dfrac{1}{6}-\dfrac{5}{9}\cdot\dfrac{3}{2}} =$

2. Simplifica las siguientes raíces

a) $\sqrt{72}-\sqrt{50}+\sqrt{18}-\sqrt{8}+\sqrt{200}=$

b) $2\sqrt{75}-3\sqrt{12}+5\sqrt{27}-7\sqrt{48}+\sqrt{300}=$

c) $\sqrt{50a}-\sqrt{18a}=$

d) $5\sqrt{12}+\frac{2}{3}\sqrt{27}-8\sqrt{75}+\frac{1}{2}\sqrt{48}=$

3. Simplifica

a) $\frac{10^4\cdot 8^2}{5^2\cdot 2^3\cdot 2^4}=$

b) $\frac{14^2\cdot 12^2}{4^2\cdot 21}=$

c) $\frac{4^{-3}\cdot 2^5}{32}=$

d) $\frac{2^5\cdot 5^2\cdot 4^{-1}}{2^3\cdot 25^{-1}}=$

4. Factor común

a) Expresa como producto de factores

a) $x^2-25=$

b) $9x^2-1=$

c) $x^2-8x+16=$

d) $3x^2+12x+12=$

e) $(x-2)^2-(x^2-4)=$

b) Simplifica y expresa el resultado como producto (cociente) de factores:

a) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2x}{x^2-1} - \dfrac{1}{x-1} =$

b) $\dfrac{x}{x^2+x} - \dfrac{1-x^2}{x^2-1} =$

c) $\dfrac{x+1}{x^2-1} - \dfrac{2}{x-1} =$

5. Comprueba las siguientes igualdades (partiendo del miembro izquierdo de la igualdad, operar hasta obtener el miembro de la derecha)

a) $2n\,(n+1) + 4(n+1) = 2(n+1)(n+2)$

b) $\dfrac{n\,(n+1)}{2} + n + 1 = \dfrac{(n+1)\,(n+2)}{2}$

c) $n\dfrac{(n+1)!}{2} + (n+1)! = \dfrac{(n+2)!}{2}$

d) $5\,(3^n + 2^n) - 6(3^{n-1} + 2^{n-1}) = 3^{n+1} + 2^{n+1}$

6. Piensa y resuelve:

a) Encuentra una fórmula general que modelice las igualdades siguientes:

$$\begin{aligned}
2 &= 2 &&= 1 \cdot 2 \\
2+4 &= 6 &&= 2 \cdot 3 \\
2+4+6 &= 12 &&= 3 \cdot 4 \\
2+4+6+8 &= 20 &&= 4 \cdot 5 \\
2+4+6+8+10 &= 30 &&= 5 \cdot 6 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

b) Utiliza el lenguaje algebraico para expresar:

1. Un múltiplo cualquiera de 5:

2. Cualquier número que no sea múltiplo de 2:

3. Un número que deje de resto 3 al dividirlo entre 5:

4. Un número que deje resto impar al dividirlo entre 5:

c) Dos compañías telefónicas hacen sendas ofertas para conexión a internet con banda ancha:

- Compañía YATEOIGO: 10 euros fijos al mes más medio euro por cada hora de conexión.
- Compañía YATEDIGO: 4 euros fijos al mes más 1 euro por cada hora de conexión.

Escribe, para cada oferta, la función que expresa el precio mensual de la conexión en términos del número de horas conectadas. ¿Cuántas horas debo estar conectada para que ambas ofertas sean igual de económicas?

Hoja 4: Funciones, conjuntos y divisibilidad (Básicos)

1. Dadas $f, g, h : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, tales que: $f(n) = 3n^2+1$, $g(n) = 5n-2$ y $h(n) = \dfrac{n-2}{3n+1}$.

a) Completar la tabla siguiente:

	$f(n)$	$g(n)$	$h(n)$
$n = 1$			
$n = 2$			
$n =$	4		
$n =$		-12	
$n =$			-2

b) Obtener, si es posible $a, b \in \mathbb{Z}$ $a \neq b$ tales que:

i) $f(a) = f(b)$

ii) $g(a) = g(b)$

iii) $h(a) = h(b)$

c) Obtener:

i) $g \circ f(n) = g(f(n)) =$

ii) $f \circ g(n) = f(g(n)) =$

iii) $h \circ f(n) = h(f(n)) =$

iv) $f \circ h(n) = f(h(n)) =$

2. Sean los conjuntos:

$A = \{\, n \in \mathbb{N}$ tales que $1 \leq n \leq 20 \,\}$.

$B = \{\, n \in A$ tales que n es primo $\}$.

$C = \{\, n \in A$ tales que n es par y $n \leq 14 \,\}$.

$D = \{\, n \in A$ tales que $n(n-9) = -18 \,\}$.

a) Obtener B, C y D por extensión.

$B =$

$C =$

$D =$

b) Obtener:

$B \cap C =$

$B \cap D =$

$B \cup C =$

$\overline{C} =$

$B - C =$

c) Dar, si es posible, un conjunto $E \subseteq A$ para cada uno de los casos siguientes:

i) $D \cup E = B$.

ii) $C \cap E = D$.

3. Factorizar los números 540 y 1155 y escribir su factorización. ¿Cuántos divisores tiene cada uno de ellos?

- 540 :

540 = El número de divisores de 540 es: .

- 1155 :

1155 = El número de divisores de 1155 es: .

4. Un número N tiene la factorización: $N = 2^3 \cdot 7^a \cdot 5^b$ con $a, b \geq 1$. Determinar los posibles valores de a y b sabiendo que N tiene 36 divisores.

5. Se dice que dos números primos p, q son gemelos si están separados por una distancia de 2, es decir, $q = p + 2$. Por ejemplo: 3 y 5 son primos gemelos. Dar tres pares de primos gemelos:

Hoja 5: Operaciones aritméticas (Básicos)

1. Representar los siguientes conjuntos mediante intervalos:

a) $\{\, x \in \mathbb{R} \;/\; x < 3 \,\} =$

b) $\{\, x \in \mathbb{R} \;/\; x \geq -2 \,\} =$

c) $\{\, x \in \mathbb{R} \;/\; x < 5 \;\text{ y }\; x \geq -3 \,\} =$

d) $\{\, x \in \mathbb{R} \;/\; x > -1 \;\text{ y }\; x < 2 \,\} =$

e) $\{\, x \in \mathbb{R} \;/\; x \leq 1/5 \;\text{ y }\; x \geq -7/8 \,\} =$

f) $\{\, x \in \mathbb{R} \;/\; x \leq -2 \;\text{ ó }\; x > 6 \,\} =$

g) $\{\, x \in \mathbb{R} \;/\; x \geq 2 \;\text{ y }\; x \geq 7 \,\} =$

h) $\{\, x \in \mathbb{R} \;/\; x \leq 3 \;\text{ y }\; x \geq 5 \,\} =$

i) $\{\, x \in \mathbb{R} \;/\; x \geq 1 \;\text{ ó }\; x \leq 4 \,\} =$

2. Resolver las siguientes inecuaciones en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{Z}$. En el caso real dar la solución en forma de intervalos y en $\mathbb{Z}$ expresada de la forma: $\{\, x \in \mathbb{Z} \;/\; x > a \; (x \leq a) \;\text{ con }\; a \in \mathbb{Z} \,\}$.

a) $6x - 13 \geq 2$

Solución en $\mathbb{R}$: Solución en $\mathbb{Z}$:

b) $5x + 7 \leq 4$

Solución en $\mathbb{R}$: Solución en $\mathbb{Z}$:

c) $4 - 3x \leq 6$

Solución en $\mathbb{R}$: Solución en $\mathbb{Z}$:

d) $8 - 2x \leq -3$

Solución en $\mathbb{R}$: Solución en $\mathbb{Z}$:

3. Resolver las siguientes sistemas de inecuaciones en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{Z}$. En el caso real dar la solución en forma de intervalos y en $\mathbb{Z}$ expresada de la forma: $\{\, x \in \mathbb{Z} \;/\; x > a \;(x \leq a)$ con $a \in \mathbb{Z}\,\}$.

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - 3 \leq -2 \\ 2x + 3 \geq -10 \end{cases}$

Solución en $\mathbb{R}$: Solución en $\mathbb{Z}$:

b) $\begin{cases} \dfrac{x+4}{7} \geq 1 \\ 10 - 2x < 0 \end{cases}$

Solución en $\mathbb{R}$: Solución en $\mathbb{Z}$:

c) $\begin{cases} 3 - 2x \leq 0 \\ 4 \leq 2 - x \end{cases}$

Solución en $\mathbb{R}$: Solución en $\mathbb{Z}$:

d) $\begin{cases} 4x - 5 \leq 7 \\ 2x - 1 \geq -4 \end{cases}$

Solución en $\mathbb{R}$: Solución en $\mathbb{Z}$:

e) $\begin{cases} 6x - 1 \leq -4 \\ 1 - 3x \geq 8 \end{cases}$

Solución en $\mathbb{R}$: Solución en $\mathbb{Z}$:

Hoja 6: Polinomios I (Álgebra)

1. Determinar cuáles de las siguientes expresiones son polinomios. Para los que lo sean, determinar su grado, coeficiente principal y término independiente.

Expresión	Grado	Coefi. Princ.	Tno. Independ.
$3x^2 - 6x + \frac{1}{2}$			
$x^3 - \frac{x^2}{4} + \sqrt{2}$			
$-x^2 + 7x^5 + x^{\frac{1}{2}}$			
$\operatorname{sen}(\frac{3\pi}{5})x^2 + x^3 - x^5 + \sqrt{3}$			
$6 - \frac{x^2}{3} + x^4 - 7x^5$			
$-2 + 3x + 4x^6 - \sqrt{5}x^7$			

2. Dados los siguientes polinomios:

$$P(x) = x^2 + x + 1 \qquad Q(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2x - 3$$
$$R(x) = x^2 - 2x - 3 \qquad Q(x) = x^3 - 3x + 1$$

calcula

$a)P(x) + Q(x) + R(x) + S(x) =$

$b)P(x) - Q(x) - R(x) - S(x) =$

$c)P(x) \cdot R(x) =$

$d)P(x) \cdot Q(x) =$

3. Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a) $(6x^4 + 5x^2 + 17x + 15) \ : \ (2x^2 - 4x + 3)$

b) $(4x^5 - 6x^4 + 2x^2 + 8) \ : \ (x^2 - 2x - 1)$

4. Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones mediante la regla de Ruffini:

a) $(5x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 6x - 1) \ : \ (x - 2)$

b) $(5x^3 - 8x + 4) \ : \ (x + 2)$

c) $(x^4 + x^2 + 1) \ : \ (x + 1)$

d) $(2x^4 + x^3 - 5x - 3) \ : \ (x - 2)$

5. Sin hacer las divisiones, hallar los restos de dividir el polinomio $x^4 - 10x^2 + 9$ entre

a) $x + 1$:

b) $x - 1$:

c) $x + 3$:

d) $x - 3$:

e) $x + 9$:

f) $x - 9$:

6. Desarrolla

a) $(x + 3)^2 =$

b) $(x + 5)(x - 5) =$

c) $(x - 4)^2 =$

d) $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) =$

e) $(2x - \dfrac{1}{2})^2 =$

f) $(\frac{x}{5}+1)(\frac{x}{5}-1) =$

7. Simplifica

a) $(x-4)^2 + (x-2)(x+2) =$

b) $(2x-1)^2 - 2(x+1)^2 =$

c) $(x-1)^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 =$

d) $(3x-5)^2 + (3x+5)(3x-5) =$

8. Hallar el valor numérico de $p(x) = x^2 + x + 16$ y $q(x) = 2x^3 - 4x + 5$ en

$$x = 1,\ x = 0,\ x = -1,\ x = 2$$

$p(1) =$ $q(1) =$

$p(0) =$ $q(0) =$

$p(-1) =$ $q(-1) =$

$p(2) =$ $q(2) =$

9. Analizar si los siguientes valores son raíces de los polinomios dados:

	x^2+1	$3x^2+6x+3$	x^2-x-2	$x^4+2x^3+x^2$
$x=0$				
$x=-1$				
$x=2$				

10. Piensa y resuelve:

a) Expresa los siguientes enunciados mediante expresiones de tipo polinómico:

1. El producto de un número por su siguiente es igual a ese número más su cuadrado.

2. El doble de uun número es igual a su cuadrado menos su mitad.

3. El valor de un número es el cuádruplo de la suma de los cuadrados de sus cifras.

b) Determinar el valor de k para que -2 sea raíz de $x^3 - 5x^2 - 7x + k$.

Hoja 7: Polinomios II (Álgebra)

1. Determinar cuáles de las siguientes expresiones son polinomios.

$a)\ x^2 + x + \dfrac{e}{2}$ $\boxed{}$ $b)\ ex^2 + x + \dfrac{1}{2}$ $\boxed{}$ $c)\ x^2 + e^x + \dfrac{1}{2}$ $\boxed{}$

2. Dados los siguientes polinomios de $\mathbb{Z}_5$:

$$P(x) = x^2 + x + 1 \qquad Q(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x - 3$$
$$R(x) = x^2 + 2x + 4 \qquad S(x) = x^3 - 3x + 1$$

calcular

$a) P(x) + Q(x) + R(x) + S(x) =$

$b) P(x) + Q(x) - R(x) - S(x) =$

3. Desarrolla las siguientes expresiones

$(7x^2 - 3)^2 =$

$(2x + 3x^2)^2 =$

$(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3}x + \sqrt{2}) =$

$(2x^2 + \sqrt{5}) \cdot (2x^2 - \sqrt{5}) =$

4. Calcular el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a) $(6x^4 + 3x^3 - 2x) \ : \ (3x^2 + 2)$

b) $(x^5 - 7x^4 + x^3 - 8) \ : \ (x^2 - 3x + 1)$

5. Calcular el cociente y el resto de las siguientes divisiones mediante la regla de Ruffini:

a) $(5x^4 + 6x^2 - 11x + 13) \ : \ (x - 2)$

b) $(3x^3 + x - 2) \ : \ (x + 1)$

6. En $\mathbb{Z}_5$, sin hacer las divisiones, hallar los restos de dividir el polinomio $x^3 + 3x^2 + 4$ entre

a) $x + 1$:

b) $x - 1$:

c) $x + 3$:

d) $x - 3$:

7. Sabiendo que las raíces enteras de un polinomio sólo pueden ser los divisores de su término independiente, obtener las raíces enteras de:

$p(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 2$ candidatos raíces

$q(x) = 3x^3 + x^2 - 12x - 4$ candidatos raíces

8. Factorizar los siguientes polinomios:

a) $16x^2 - 25 =$

b) $3x^2 + 2x - 8 =$

c) $3x^2 - 48 =$

d) $x^3 + 2x^2 + x =$

9. Piensa y resuelve:

a) Determinar el valor de k para que -1 sea raíz de $x^3 - 5x^2 - 7x + k$.

b) Determinar el valor de m para que el polinomio $x^3 - mx^2 + 5x - 2$ sea divisible por $x + 1$.

c) Sea $p(x) = x^3 + kx^2 - x - 6$ un polinomio que es divisible por $x - 3$. Hallar el valor de k y el resto de dividir $p(x)$ entre $x + 2$.

d) Obtener un polinomio de grado 4 que sea divisible por $(x - 5)$ y $(x - 2)$, que sólo tenga dos raíces reales simples y su coeficiente principal sea 3.

Hoja 8:Polinomios repaso (Álgebra)

1. Determinar cuáles de las siguientes expresiones son polinomios. Para los que lo sean, determinar su grado, coeficiente principal y término independiente en los conjuntos que se indican.

Expresión	Sí/No	Conjunto	Grado	Coef. Princ.	Tno. Indep.
$\sqrt{2}x^2 - 6x^3 + \frac{1}{2}$		$\mathbb{R}$			
$x^3 - \frac{x^2}{4} + \operatorname{sen}(\sqrt{2}\pi)$		$\mathbb{R}$			
$-x^2 + 7x^5 + x^{1/2}$		$\mathbb{R}$			
$15x^2 + x^3 - 10x^5 + 7$		$\mathbb{Z}_5$			
$6 - 3x^2 + x^4 - 7x^5$		$\mathbb{Z}_3$			
$-2 + 3x + 4x^6 - \sqrt{5}x^7$		$\mathbb{R}$			

2. Calcula el cociente y el resto de $(6x^4 + 5x^2 + 17x + 15) \ : \ (2x^2 - 4x + 3)$

3. Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones mediante la regla de Ruffini:

a) En $\mathbb{R}$: $(5x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 6x - 1) \ : \ (x - 3)$

b) En $\mathbb{R}$: $(5x^3 - 8x + 4) \ : \ (x + 1)$

c) En $\mathbb{Z}_3$: $(2x^4 + x^3 + 1) \ : \ (x + 1)$

d) En $\mathbb{Z}_5$: $(2x^4 + x^3 - 5x - 3) \ : \ (x - 3)$

4. Sin hacer las divisiones, hallar los restos de dividir el polinomio $x^4 - 10x^2 + 9$ entre

a) $x - 1$:

b) $x + 1$:

c) $x - 3$:

5. Desarrolla

En $\mathbb{R}$: $(x-4)^2 =$

En $\mathbb{R}$: $(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3}x + \sqrt{2}) =$

En $\mathbb{R}$: $(2x^2 + \sqrt{5}) \cdot (2x^2 - \sqrt{5}) =$

En $\mathbb{Z}_7$: $3(x+3)^2 =$

En $\mathbb{Z}_7$: $(x+4)(x-4) =$

En $\mathbb{Z}_7$: $(2x-1) \cdot (2x+1) =$

6. Factorizar los siguientes polinomios:

$9x^2 - 25 =$

$3x^2 + 2x - 8 =$

$7x^2 - 42 =$

$x^3 + 2x^2 + x =$

$3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 =$

$(3x-5)^2 + (3x+5)(3x-5) =$

7. Dar un polinomio de grado 4 (factorizado) que verifique exactamente la condición pedida o indicar que no puede existir:

a) Sin raíces:

b) Con una raíz doble:

c) Con una raíz triple:

d) Con cuatro raíces distintas:

e) Con 1 raíz simple y 1 doble:

Hoja 9: Matrices I (Álgebra)

1. Se consideran las matrices $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ y $C = (c_{ij})$ siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & x \\ 4 & 2 \\ y & z \end{pmatrix}$$

a) Determinar, si existen, los elementos

$$a_{11}\ \boxed{} \qquad a_{31}\ \boxed{} \qquad a_{13}\ \boxed{} \qquad b_{22}\ \boxed{} \qquad c_{12}\ \boxed{} \qquad c_{33}\ \boxed{}$$

b) Calcular

$$A + B = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \qquad 2A - B = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} \qquad A - \lambda B = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

c) Estudiar si es posible obtener x, y y z para que $C = A$ o para que $C = B$:

2. Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Escribir las matrices traspuestas de A, B, C y D.

$$A^t = \qquad\qquad B^t = \qquad\qquad C^t = \qquad\qquad D^t =$$

b) Calcular $A \cdot B$, $B \cdot C$, $D \cdot B$, A^2

3. Escribir las matrices identidad de orden 2 y de orden 3, I_2 e I_3.

4. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, calcular A^2, A^3 y dar la forma general de $A^n, n \in \mathbb{N}$.

5. Se dice que A^{-1} es la matriz inversa de A, una matriz cuadrada de orden n, si se cumple que

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Estudiar si los siguientes pares de matrices son inversas:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$:

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$:

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$:

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-23}{5} & \frac{22}{5} \\ \frac{-48}{5} & \frac{44}{5} & \frac{-41}{5} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$:

6. Hallar el determinante de las siguientes matrices *a*) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} =$

b) $|B| = \begin{vmatrix} 3 & 1/4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$

d) $|D| = \begin{vmatrix} 1/2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1/2 \\ 2 & 1/2 & 1 \end{vmatrix} =$

d) $|E| = \begin{vmatrix} \cos(x) & \mathrm{sen}(x) & 1 \\ \mathrm{sen}(x) & \cos(x) & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$

7. Comprobar las siguientes propiedades de los determinantes

a) $\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & y \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & y \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

8. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -12 & -5 \end{pmatrix}$,

a) Obtener la matriz $A - \lambda I_2$ y su determinante: $|A - \lambda I_2|$

b) Factorizar el polinomio de grado 2 en λ obtenido en el apartado anterior.

9. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Obtener la matriz $A - \lambda I_3$

b) Obtener el determinante de la matriz anterior, $|A - \lambda I_3|$

c) Factorizar el polinomio de grado 3 en λ obtenido en el apartado anterior.

10. Piensa y resuelve:

a) Sea $A = \begin{pmatrix} x & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Hallar x para que $A \cdot A^t$ sea diagonal.

b) Dadas $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Comprobar que $A \cdot B \neq B \cdot A$.

2. Calcular $(A + B)^2$ y estudiar si $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2A \cdot B$.

3. Calcular $(A + B)(A - B)$ y estudiar si $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

Hoja 10: Matrices II (Álgebra)

1. Dadas las matrices siguientes (A, B, C y D)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ y \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Decir si las operaciones indicadas se pueden realizar o no:

$A + B$ $\square$ $\qquad A \cdot B$ $\square$ $\qquad C^t$ $\square$ $\qquad C \cdot D$ $\square$

b) Para las que sí se pueda, realizar la operación:

2. Indicar con 0, 1 ó 2 si las siguientes matrices no son escalonadas (0), son escalonadas pero no reducidas (1) o son escalonadas reducidas (2):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \square \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \square \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \square \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \square$$

3. Escalonar las siguientes matrices, utilizando el algoritmo de Gauss, e indicando las operaciones elementales efectuadas en cada paso:

a) Con coeficientes en $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

b) Con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

4. Las siguientes matrices ampliadas están asociadas a sistemas de ecuaciones en $\mathbb{R}$. Utilizar el teorema de Roché-Frobenius para decir qué tipo de sistema es (incompatible, compatible determinado/indeterminado). En caso de ser compatible, resolverlo.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

5. Estudiar si los siguientes pares de matrices son inversas:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4/5 & -3 \\ -1/5 & 2 \end{pmatrix}$:

b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$:

6. Decidir si la matriz $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ tiene inversa en $\mathbb{Z}_3$. En caso afirmativo, calcularla.

7. Piensa y resuelve:

a) Dadas $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -12 & -5 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, resolver la ecuación matricial $A \cdot X = B$.

b) Obtener el polinomio de grado 4 que verifica todas las condiciones siguientes:

1. Su término independiente es 0 y el de mayor grado tiene coeficiente 1.

2. Es divisible por $x - 2$.

3. El resto de dividirlo entre $x - 3$ vale 15.

4. Su valor numérico en $x = -1$ es -9.

c) Se quieren repartir 4.400 millones de euros entre 4 universidades, A, B, C y D. La universidad A recibe el doble que las universidades B y C juntas. Lo que recibe B es el triple de lo que reciben C y D juntas. C y D reciben lo mismo. ¿Cuánto recibe cada universidad?

Hoja 11: Matrices y Espacios vectoriales I (Álgebra)

1. Escalonar las siguientes matrices, utilizando el algoritmo de Gauss, e indicando las operaciones elementales efectuadas en cada paso:

a) Con coeficientes en $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

b) Con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Obtener la matriz inversa, en caso de que exista.

b) Para las que sí tengan inversa, comprobar la solución obtenida mediante la definición.

3. Indicar con 0, 1 ó 2 si las siguientes matrices no son escalonadas (0), son escalonadas pero no reducidas (1) o son escalonadas reducidas (2):

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boxed{} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boxed{} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boxed{} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boxed{}$$

4. Las siguientes matrices están asociadas a sistemas de vectores de $\mathbb{R}^n$: los vectores se han colocado en filas y se ha escalonado la matriz. En cada caso, decir

a) quién es el espacio ambiente $\mathbb{R}^n$,

b) el número de vectores del sistema original que son linealmente independientes,

c) ampliar el sistema libre obtenido en las filas a una base de $\mathbb{R}^n$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.
2.
3.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.
2.
3.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.
2.
3.

5. Estudiar si los siguientes sistemas son bases de los espacios que se indican:

a) En $\mathbb{Z}_3^3$: $\{(1,1,0),\ (1,0,2),\ (1,2,1)\}$

b) En $(\mathbb{Z}_5)_3[x]$: $\{1+x^2, x+2x^3, -1+x^2, -x+3x^3\}$

c) En $\mathbb{R}_3[x]$: $\{1+x^2, x+2x^3, -1+x^2, -x+3x^3\}$

6. Dada la base de $\mathbb{R}^3$, $B = [(1,1,1),\ (1,0,-1),\ (0,0,1)]$, obtener las coordenadas respecto de la base canónica de los siguientes vectores, que están dados respecto de B.

$(1,1,1)_B =$

$(1,-1,1)_B =$

$(1,0,0)_B =$

$(0,0,2)_B =$

7. Dada la base de $\mathbb{R}^3$, $B = [(1,1,1),\ (1,0,-1),\ (0,0,1)]$, obtener las coordenadas respecto de B de los vectores dados en la base canónica

$(1,1,1) =$

$(1,1,0) =$

$(0,0,2) =$

$(1,0,0) =$

8. Piensa y resuelve:

En $\mathbb{R}_3[x]$, se tiene el sistema de vectores $\{1 + x + x^3,\ x + x^2\}$. Ampliar el sistema de modo que en la primera ampliación no se obtenga una base y en la siguiente sí. Justificar la respuesta.

Hoja 12: Matrices y Espacios vectoriales II (Álgebra)

1. Estudiar si el sistema $\{(1,2,3,1),\ (2,1,0,1),\ (0,1,2,2)\}$ es un sistema libre en $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5^4, \mathbb{R}^4$. En caso afirmativo, ampliarlo a una base del espacio.

a) En $\mathbb{R}^4$:

b) En $\mathbb{Z}_5^4$:

2. Estudiar si los siguientes sistemas son generadores de $\mathbb{R}^3$. En caso afirmativo, extraer un sistema libre y ampliarlo a una base del espacio.

a) $\{(1,2,-2),\ (2,1,-1),\ (0,-1,1),\ (-1,1,-1)\}$:

b) $\{(1,2,-2),\ (2,1,-1),\ (0,-1,1),\ (0,0,1)\}$:

3. Dada la base $B = [\,(1,0,1),\ (1,1,0),\ (0,0,1)\,]$ de R^3, calcular las coordenadas respecto de dicha base de los vectores:

a) $u_1 = (1,0,1) =$

b) $u_2 = (1,1,0) =$

c) $u_3 = (1,1,1) =$

d) $u_4 = (1,0,0) =$

4. Dada la base $B = [\,1,\ 1+x,\ 1+x+x^2]$ de $R_2[x]$, calcular las coordenadas respecto de dicha base de los vectores:

a) $u_1 = 1 =$

b) $u_2 = 1 + x =$

c) $u_3 = x =$

d) $u_4 = x^2 =$

5. Dada la base $B = [\,(1,0,1),\ (1,1,0),\ (0,0,1)]$ de R^3, calcular las coordenadas respecto de la base canónica de los vectores:

a) $u_1 = (1,0,0)_B =$

b) $u_2 = (1,1,0)_B =$

c) $u_3 = (0,-2,1)_B =$

6. Dada la base $B = [\,1,\ 1+x,\ 1+x+x^2]$ de $R_2[x]$, calcular las coordenadas respecto de la base canónica, $B_c = [1, x, x^2]$, de los vectores:

a) $u_1 = (1,0,-1)_B =$

b) $u_2 = (1,1,0)_B =$

c) $u_3 = (1,1,-1)_B =$

7. Dada la base de $\mathbb{R}^3$, $B = [(1,1,1),\ (1,0,-1),\ (0,0,1)]$:

a) Obtener la expresión matricial del cambio de base de B a B_c.

b) Usar dicha expresión para obtener los vectores siguientes en coordenadas respecto de la base canónica $(1,2,1)_B,\ (-1,-1,1)_B,\ (1,0,0)_B$:

c) Obtener la expresión matricial del cambio de base de B_c a B.

8. Piensa y resuelve:

En $\mathbb{R}^3$, se tiene la siguiente expresión matricial para el cambio de base de $B_1 = [e_1,\ e_2,\ e_3]$ y $B_2 = [u_1,\ u_2,\ u_3]$:

$$X_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X_{B_1}$$

Decir qué relación guardan los vectores de ambas bases. Justificar la respuesta.

Hoja 13: Espacios vectoriales (Álgebra)

1. Estudiar si el siguiente sistema es generador de V, en cada caso. En caso afirmativo, extraer una base del espacio.

a) $V = \mathbb{R}^3$, y $\{(1,0,-2),\ (1,1,-1),\ (0,-1,1),\ (-1,1,-1)\}$:

b) $V = \mathbb{R}_2[x]$ y $\{1+x,\ x+x^2,\ 1-x+x^2,\ x-x^2\}$:

2. Dada la base $B = [\ (1,0,1),\ (1,1,0),\ (-1,0,1)]$ de $\mathbb{R}^3$, calcular las coordenadas respecto de la base canónica de los vectores:

a) $u_1 = (1,0,0)_B =$

b) $u_2 = (1,0,1)_B =$

3. Dada la base $B = [\ 1+x^2,\ 1+x,\ 1+x+x^2]$ de $\mathbb{R}_2[x]$, calcular las coordenadas respecto de la base canónica, $B_c = [1, x, x^2]$, de los vectores:

a) $u_1 = (1,0,-1)_B =$

b) $u_2 = (1,1,-1)_B =$

4. En $\mathbb{R}^4$:

a) Comprobar que $B = [\,(1,2,1,1),\ (1,1,0,1),\ (0,1,0,2),\ (0,0,0,1)\,]$ es base.

b) Obtener la expresión matricial del cambio de base de B a B_c.

c) Usar la expresión matricial anterior para obtener los vectores $(1,1,1,1)_B$, $(1,0,0,2)_B$ respecto de la base canónica.

d) Obtener la expresión matricial del cambio de base de B_c a B.

e) Usar la expresión matricial anterior para obtener las coordenadas de los vectores de la base canónica respecto de la base B.

5. Piensa y resuelve: En $\mathbb{R}^3$, se tiene la siguiente expresión matricial para el cambio de base de $B_1 = [e_1,\ e_2,\ e_3]$ y $B_2 = [u_1,\ u_2,\ u_3]$:

$$X_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X_{B_1}$$

Decir qué relación guardan los vectores de ambas bases. Justificar la respuesta.

Hoja 14: Subespacios vectoriales I (Álgebra)

1. Sean V un espacio vectorial y S un subespacio. Decir cuál es el número de parámetros de unas ecuaciones paramétricas minimales de S, el número de ecuaciones implícitas minimales de S y la dimensión de S en cada uno de los casos siguientes:

$\dim(V)$	$\dim(S)$	nº ec. paramétricas	nº ec. implícitas
4	2		
4	3		
3	1		
5			3
4		1	
		3	2

2. Calcular la dimensión de los siguientes subespacios:

a) $V = \mathbb{R}^3$ y $S \equiv \left.\begin{array}{rl} x = & \lambda + 2\beta \\ y = & \lambda + \beta + \gamma \\ z = & 2\lambda + 3\beta + \gamma \end{array}\right\}$

b) $V = \mathbb{Z}_5^4$ y $S = \{\, (2a+b,\ a+b+c,\ b+2c,\ 2a+2b+2c) \ / \ a,b,c \in \mathbb{Z}_5\}$.

c) $V = \mathbb{R}^3$ y $S \equiv \left.\begin{array}{rl} x - y + z & = 0 \\ 2x + y + 3z & = 0 \\ x + z & = 0 \end{array}\right\}$

d) $V = \mathbb{Z}_5^4$ y $S \equiv \left.\begin{array}{rl} x + 2y + 3z + t & = 0 \\ 2x + y + t & = 0 \\ y + 2z + 2t & = 0 \end{array}\right\}$

3. Sea $S = \{\,(2a + b + 3c,\ a + 2b,\ b + 2c,\ 2a + 3b + c) \ / \ a, b, c \in \mathbb{R}\}$, subespacio de $\mathbb{R}^3$. Obtener

a) Una base y la dimensión de S.

b) Unas ecuaciones paramétricas minimales de S.

c) Unas ecuaciones implícitas minimales de S.

Hoja 15: Subespacios vectoriales II (Álgebra)

1. Decir en qué tipo de ecuaciones están dados los siguientes subespacios y calcular su dimensión:

a) $V = \mathbb{R}^3$ y $S \equiv \left.\begin{array}{rl} x = & 2\beta + \gamma \\ y = & \lambda + \beta + \gamma \\ z = & \lambda + 3\beta + 2\gamma \end{array}\right\}$

b) $V = \mathbb{R}^3$ y $S \equiv \left.\begin{array}{rl} x - y + z & = 0 \\ 2x + y + 3z & = 0 \\ x + 2y + 2z & = 0 \end{array}\right\}$

c) $V = \mathbb{Z}_5^3$ y $S \equiv \left.\begin{array}{rl} x + 2y + 3z & = 0 \\ x + 3y & = 0 \\ 3y + z & = 0 \end{array}\right\}$

2. Sea $S = \mathcal{L}\big((1,4,0,2)_B,\ (0,1,2,1)_B\big)$ subespacio de $\mathbb{R}^4$, donde $B = [(1,1,0,0),\ (0,1,1,0),\ (1,0,-1,0),\ (0,0,0,1)]$. Obtener

a) Una base y la dimensión de S.

b) Unas ecuaciones paramétricas minimales de S respecto de B y respecto de B_c.

c) Unas ecuaciones implícitas minimales de S respecto de B_c.

3. En $V = \mathbb{Z}_5^3$, obtener unas ecuaciones paramétricas minimales del subespacio

$$S \equiv \left.\begin{array}{r l} x + 2y + 3z & = 0 \\ x + 3y & = 0 \\ 3y + z & = 0 \end{array}\right\}$$

Hoja 16: Relaciones de equivalencia (Matemática Discreta)

1. En $\mathbb{N}$ se define la relación binaria R:

$$n\, R\, m \iff n \text{ y } m \text{ terminan en el mismo dígito.}$$

a) Estudiar si R es reflexiva, simétrica, transitiva o antisimétrica. ¿Es R una relación de orden o de equivalencia?

b) Sea $A = \{0, 1, \ldots, 25\}$. Calcular las clases de equivalencia y el conjunto cociente A/R.

c) Calcular el cardinal del conjunto cociente $\mathbb{N}/R$.

2. Sea A el conjunto de cadenas de 3 bits. Se define la relación R sobre A:

$$a_1a_2a_3 \ R \ b_1b_2b_3 \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3$$

a) Demostrar que R es de equivalencia.

b) Hallar el conjunto cociente A/R y su cardinal.

3. En el conjunto $A = \{3, 9, 21\} \cup \{7^n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ con la relación de divisibilidad, se pide:

a) Dibujar el diagrama de Hasse de $(A, |)$.

b) Determinar maximales, minimales, máximo y mínimo, si existen.

Hoja 17: Combinatoria y probabilidad (Matemática Discreta)

Principios generales de recuento

1. Un coche se fabrica con dos tipos de motores: diésel y gasolina; en 7 colores y con tres terminaciones: básica, semilujo y lujo. ¿Cuántos modelos diferentes se construyen?

2. Se lanzan al aire tres dados cúbicos de diferentes colores y con las caras numeradas. ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener?

3. En una carrera de medio fondo participan 7 atletas. ¿De cuántas maneras diferentes pueden entrar en la meta si no es posible el empate?

4. Con las letras de la palabra $VIDA$, ¿cuántas palabras de cuatro letras se pueden formar sin que se repita ninguna? ¿Cuántas acaban en A?

5. En un concurso participan 16 personas y se adjudican tres premios. Si no puede haber ningún premio desierto, ni se puede adjudicar un mismo premio a dos personas, ¿de cuántas maneras se pueden conceder los premios?

6. Con las cifras $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, ¿cuántos números de 4 cifras distintas se pueden escribir? ¿Cuántos de ellos son pares?

7. Las matrículas de los coches están formadas por 4 números seguidos de 3 letras, tomadas de una colección de 20. ¿Cuántos automóviles se pueden matricular con este sistema?

Probabilidad elemental

8. Se tira un dado cúbico al aire y se anota el resultado. Hallar la probabilidad de obtener un número primo.

9. Se saca una carta de una baraja española. Hallar las siguientes probabilidades:

a) Obtener un as.

b) Obtener una carta de espadas.

c) Obtener un número, no figura, mayor que 5.

d) Obtener una figura de copas.

e) Obtener una figura o una carta de copas.

10. En la Biblioteca están estudiando 5 alumnos de primero de Software, 7 de primero de Computadores, 8 de segundo y 12 de máster. Si se elige un alumno al azar, estudiar si es más probable que sea de primero o de máster. ¿Cuál es la probabilidad de elegir un alumno y que no sea de máster?

11. Se extrae una carta de una baraja y se tira un dado cúbico con las caras numeradas del 1 al 6. Hallar la probablidad de obtener una espada y un número par en el dado.

12. Se extraen dos cartas de una baraja española. Hallar la probabilidad de que ambas sean de copas si las cartas se extraen sin devolución y con devolución.

Hoja 18: Lógica (Matemática Discreta)

1. Se considera la siguiente función definida mediante el principio de recursión estructural:

$f(A)$ = número de símbolos de la fórmula A, sin considerar los paréntesis.

R1)	$f(A) = 1$	para toda fórmula atómica A.
R2)	$f(\neg A) = 1 + f(A)$	para toda fórmula A.
R3)	$f(A \oplus B) = 1 + f(A) + f(B)$	para todo par de fórmulas A, B.

Evaluar detalladamente en la fórmula $\neg p \wedge q \longleftrightarrow p \vee \neg\top$.

2. Formalizar y estudiar la corrección del siguiente razonamiento. Caso de ser inválido, construir un contraejemplo:

Si llueve entonces la tierra está verde.
Si estamos en noviembre y hace frío entonces llueve.
La tierra está verde, pero estamos en noviembre.

No hace frío.

3. Demostrar por reglas de inferencia la corrección de las siguientes estructuras deductivas:

a) $p \to q,\ q \to r,\ s \to r \implies p \vee s \to r$

b) $p \to (q \to r),\ r \wedge s \to t,\ \neg w \to s \wedge \neg t \implies p \to (q \to w)$

c) $r \leftrightarrow q,\ p \vee q,\ s \rightarrow \neg r \implies s \rightarrow p.$

d) $p \wedge (r \rightarrow t) \rightarrow s,\ s \vee q,\ q \rightarrow p,\ r \vee s \rightarrow \neg p \vee t \implies s.$

4. (Acertijos de Lógica: sinceros y mentirosos.) Seis robots dialogan en la sala de espera del psiquiatra. Están aquejados de un extraño mal: solo dicen mentiras o solo dicen verdades. Todos se conocen perfectamente. Hablan los seis, por turno, y afirman:

- Aquí solo hay uno sincero.
- Al menos hay uno sincero.
- Solo hay dos sinceros.
- Al menos dos son sinceros.
- Solo hay tres sinceros.
- Al menos hay tres sinceros.

¿Cuáles dicen la verdad y cuáles son los mentirosos?

5. (Acertijos de Lógica.) Cuatro amigas van juntas al cine y charlan mientras esperan el comienzo de la sesión. Indica el orden en que están sentadas, el color de la camiseta y el gusto cinematográfico de cada una de ellas si se sabe que

- Victoria comenta que le gustan las películas de intriga.
- Quien lleva la camiseta verde es aficionada a las películas de terror.
- A quien se sienta a la derecha de Paloma le gustan la películas de acción.
- Victoria se sienta a la izquierda de Paloma.
- Marta lleva una camiseta amarilla.
- A quien se sienta a la derecha de Elena le gustan las películas de amor.
- La de la camiseta amarilla se sienta a la derecha de la camiseta crema.
- La de la camiseta blanca tiene catarro.

6. (Acertijos de Lógica: Problemas informáticos.) Tres amigos (Xavier, Yavier y Zavier), de apellidos (no necesariamente en ese orden) Ruiz, Suiz y Tuiz utilizan sus ordenadores con diversos sistemas operativos (Mac, Windows, y Linux). Los tres tuvieron problemas. A uno lo infectó un virus, a otro le explotó el monitor y al restante le hackearon la máquina. Descubre el nombre, apellido, sistema operativo que utiliza y el problema que tuvo a partir de las siguientes pistas:

- Quien utilizaba Mac y mi amigo Tuiz, estaban muy preocupados por sus máquinas, pero igual se rieron cuando se enteraron que a la de Yavier la había infectado un virus.
- Xavier Suiz no utiliza Windows.
- Quien utilizaba Linux, sufrió el ataque de un Hacker.

Nombre	Apellido	Sistema operativo	Problema informático

Hoja 19: Introducción al método de inducción (Matemática Discreta)

1. Para cada una de las expresiones $f(n)$, obtener $f(k)$, $f(k+1)$ y expresar $f(k+1)$ en función de $f(k)$.

a) $f(n) = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$

f(k)= f(k+1)=

f(k+1)=

b) $f(n) = 1 + 2 + \cdots (n-1) + n$

c) $f(n) = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n$

d) $f(n) = 1 + 3 + \cdots + (2n-1)$

e) $f(n) = 1 + 2^2 + \cdots + n^2$

2. En cada uno de los casos siguientes, expresar $f(k+1)$ en función de $f(k)$ (ejercicio anterior) y usando la igualdad $f(k) = g(k)$, comprobar que también se cumple $f(k+1) = g(k+1)$.

a) $f(n) = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n \quad g(n) = n!$

f(k+1)= g(k+1)=

f(k+1)=

b) $f(n) = 1 + 2 + \cdots (n-1) + n \quad g(n) = \dfrac{(1+n)n}{2}$

c) $f(n) = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n \quad g(n) = 2^{n+1} - 1$

d) $f(n) = 1 + 3 + \cdots + (2n-1) \quad g(n) = n^2$

e) $f(n) = 1 + 2^2 + \cdots + n^2 \quad g(n) = \dfrac{n(1+n)(2n+1)}{6}$

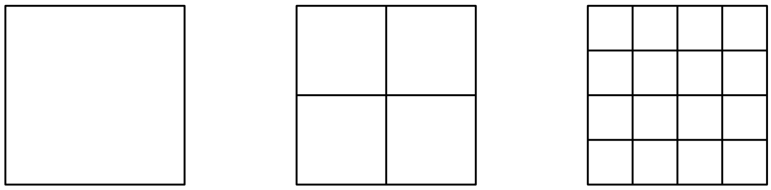
Hoja 20: Inducción y Recursividad (Matemática Discreta)

1. Probar por inducción:

a) $$4 + 12 + \cdots + (8n - 4) \;=\; (2n)^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N},\; n \geq 1.$$

b) $$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) \;=\; \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\; n \geq 1.$$

2. Se considera la siguiente sucesión de cuadrados



$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$

$C(1) = 1$ $C(2) = 4$ $C(3) = 16$

a) Dar una definición recursiva y una explícita de la función $C(n)$, que cuenta el número de cuadrados de lado mínimo que hay en cada etapa.

b) Probar por inducción que $C(1)+C(2)+\cdots+C(n) = \dfrac{4^n - 1}{3}$ para todo $n \geq 1$.

3. Definir una función recursiva $f : \mathbb{N} \to LIST_P(\mathbb{N})$ tal que:

$$f(n) = [1, 1+2, \dots, 1+\cdots+n]$$

4. Definir una función recursiva $SV(v_1, v_2)$, tal que dados dos vectores de la misma longitud, devuelva el vector suma de ambos. Por ejemplo:

$$SV([1,1],[3,-2]) = [4,-1], \qquad SV([1,0,5],[3,-2,4]) = [4,-2,9]$$

5. Las matrices se pueden representar como listas de listas del modo siguiente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & 0 & 0 \\ -6 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \big[\,[2,5,0,3],[-4,3,0,0],[-6,5,2,1]\,\big]$$

Definir una función recursiva $SM(m_1, m_2)$ que dadas dos matrices del mismo tamaño devuelva la matriz suma de ambas.

Nota: Utilizar la función definida anteriormente SV.

6. Los polinomios de la forma $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ se pueden representar como listas del modo siguiente $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$. Definir la función recursiva SP tal que dados dos polinomios devuelva el polinomio suma de ambos.