

# Un modelo de curso integrado de Cálculo en una variable

Agustín de la Villa  
Universidad Pontificia Comillas y Politécnica de Madrid  
Madrid, 28015 y 28034, España

Francisco García  
Universidad Politécnica de Madrid  
Madrid, 28034, España

Angel Martín  
Universidad de Salamanca  
Ávila, 05003, España

y

Gerardo Rodríguez  
Universidad de Salamanca  
Zamora, 49022, España

## RESUMEN

El reto del Espacio Europeo de Educación Superior, que pretende unificar los estudios de los países miembros de la Unión Europea, ha puesto de manifiesto la posibilidad de usar las técnicas de enseñanza no presencial como un canal más de transmisión del conocimiento para ser usado, en mayor o menor medida, junto con la enseñanza “más tradicional”. Ello nos permite diseñar un curso de Cálculo que aglutine los aspectos tradicionales (clases magistrales y de problemas) de la enseñanza de las matemáticas con las nuevas tecnologías (uso de paquetes de Cálculo Simbólico, webs interactivas, libros electrónicos, applets, etc.). Esto nos permitirá por un lado profundizar en determinados conceptos matemáticos y por otro la resolución de problemas “reales” y no problemas docentes y preparados, que son los únicos que pueden resolverse por los métodos tradicionales.

**Palabras Claves:** Espacio Europeo de Educación Superior. Cálculo. E-learning. Ingeniería. CAS.

## 1. ALGUNAS CARACTERÍSTICAS DEL ESPACIO EUROPEO DE EDUCACIÓN SUPERIOR

La adecuación de la estructura de los diferentes estudios universitarios al Espacio Europeo de Educación Superior (EEES), objetivo derivado de la Declaración de Bolonia, es la gran tarea pendiente de los diferentes sistemas universitarios europeos. La reforma afecta no sólo a la estructura de los estudios universitarios, sino que además provoca una reflexión de ámbito europeo sobre la adecuación de los contenidos de las asignaturas de matemáticas y, lo que es más importante, sobre la manera de enseñar matemáticas. Ya no es posible mantener el mismo estilo de enseñanza de las matemáticas que hace 50 años y debe hacerse visible en las aulas la revolución tecnológica ocurrida en las últimas décadas.

Entre las características esenciales de la nueva situación hay que citar la enseñanza basada en competencias, diversificada y focalizada al trabajo global del estudiante (en contraposición al sistema actual en el que la única medida del trabajo son las horas de clase presencial) con la introducción del crédito ECTS (European Credit Transfer System) en la que se mide el trabajo del estudiante y no la enseñanza impartida presencialmente por el profesor.

Las exigencias para el profesorado, provenientes de la política de armonización a nivel europeo de los estudios superiores son, en definitiva:

- Que los profesores enseñen cosas con valor en el mercado de trabajo (competencias).
- Que los profesores enseñen de forma diferente (innovación metodológica).
- Que sean los estudiantes y sus necesidades el criterio básico para la planificación y desarrollo de la docencia (los estudiantes como referente).

Todo ello debe implicar una mayor dedicación de los profesores al proceso de aprendizaje del alumno, que debe incluir horas de docencia, horas de organización, preparación de material, propuesta de trabajos, orientación y dirección de los mismos, y, en general, supervisar todo el proceso de aprendizaje del alumno.

A la vista de las características del EEES y las exigencias del profesorado antes mencionadas, se imponen algunos cambios, a veces drásticos, respecto de nuestra práctica docente habitual. El cambio exigido no sólo afecta a los contenidos, derivados de una menor formación inicial, en general, de los conocimientos matemáticos adquiridos en las etapas previas a los estudios universitarios, como ponen de manifiesto diferentes informes de ámbito europeo (como el informe PISA), sino que es preciso abordar un cambio metodológico que permita afrontar las nuevas necesidades de aprendizaje de los alumnos. La utilización de todo el potencial que proporcionan las nuevas tecnologías aplicadas al ejercicio docente puede derivar en la necesidad de replantearse la organización de los diferentes

grupos docentes, adaptando su tamaño a las posibilidades de las diferentes aulas de informática.

Finalmente, debemos cambiar el proceso de evaluación, encontrando mecanismos que evalúen la totalidad del proceso de aprendizaje. Las nuevas tecnologías nuevamente son la herramienta clave, permitiendo llevar a la práctica procesos de autoevaluación bien diseñados, prácticas dirigidas, etc.

Toda esta situación obliga a que los profesores pongan especial cuidado en planificar los siguientes elementos:

1. Las competencias que el estudiante adquirirá de forma independiente en el contexto de la oferta total de competencias que se enseñan en la materia en cuestión.
2. Los escenarios académicos donde el profesor quiere que se lleve a cabo el aprendizaje, que hacen referencia a aulas especializadas (de informática, laboratorios, de medios audiovisuales, etc.), a bibliotecas y otros centros de documentación, siempre que el estudiante tenga la posibilidad de actuar en ellos de forma independiente. También un uso adecuado del e-learning y del b-learning puede ayudar al aprendizaje.
3. El proceso de trabajo que deberá seguir el estudiante para la adquisición de esas competencias, especificando las fases de que constará la secuencia total de trabajo, las tareas a realizar por el estudiante y por el profesor en cada una de las fases y la duración estimada para cada una de ellas (propuesta de número de horas y calendario).
4. El sistema de tutela-supervisión que el profesor ha ideado para controlar la adquisición de las competencias por parte de los estudiantes. Esto implica que debemos especificar al menos tres elementos: el formato de la supervisión (presencial, a distancia o mixto), los momentos en que el estudiante deberá conectar con el profesor para explicar lo que ha realizado (número de veces que ha de acudir a tutela, acceder a la página web o comunicar por correo electrónico y las fechas en las que deberá hacerlo) y los elementos y requisitos para la supervisión (qué deberá presentar el estudiante y de qué forma, documentos escritos, etc.)
5. El sistema de evaluación de las competencias adquiridas por el estudiante de forma independiente. En este sentido hay que diseñar los criterios de evaluación (resultados esperados en cada una de las fases y resultados globales del proceso), las evidencias relativas a cada criterio (datos recogidos, informes generados, etc.) que puedan ser evaluados, los instrumentos de evaluación y las fechas de evaluación.

Con el panorama que acabamos de describir, es necesario resaltar la importancia que en la nueva configuración académica van a cobrar todas las técnicas de enseñanza no presencial. En este sentido, como ya pasó con la introducción de los diferentes sistemas informáticos de cálculo matemático, el significado del término e-learning es ambiguo y admite varias interpretaciones. Desde nuestro punto de vista, para poder hablar de e-learning en nuestro ámbito es necesario que la propuesta de enseñanza no presencial no se limite a la disponibilidad del material de clase en la red. Necesitamos material interactivo, material con diferentes grados de complejidad que posibiliten la autoevaluación y permitan al profesor medir los conocimientos adquiridos mediante ese mecanismo.

## 2. ALGUNAS REFLEXIONES Y EXPERIENCIAS

La historia de la enseñanza de las matemáticas en las Escuelas de Ingeniería durante los últimos 20 años ha estado marcada

por la introducción en mayor o menor medida de los paquetes de cálculo simbólico (CAS) en las diferentes asignaturas: Cálculo, Álgebra, Ecuaciones diferenciales, etc. Su uso no sólo se ha restringido a aprovechar su “potencia de cálculo”, lo que permite resolver problemas reales de la técnica, sino que se han convertido en una herramienta didáctica muy importante con el aumento de las prestaciones de los ordenadores. Como es sabido, a lo largo de los años 90 se realizaron numerosos congresos sobre CAS y multitud de libros y manuales de uso de los diferentes CAS inundaron el mercado editorial.

Un segundo hito ha sido la popularización de Internet, que ha propiciado la aparición de multitud de webs con diferentes contenidos matemáticos, por lo que se hace imprescindible distinguir “el grano de la paja” ya que se pueden encontrar webs que sirven para poner a disposición de los estudiantes distinto material, a veces manuscrito, o colecciones de problemas y webs donde es posible encontrar materiales interactivos, libros electrónicos, etc.

En los últimos años la mayoría de las Universidades ponen a disposición del profesorado sistemas de enseñanza on-line que permiten entrega de material, participación en foros y chats, recogida de trabajos, comunicación con el alumnado, autoevaluación, etc.

En resumen, el e-learning, en el sentido más amplio de la palabra, se debe considerar como un canal más en el proceso de aprendizaje del alumno, que en determinadas ocasiones puede ser un complemento y en otras una alternativa a los procedimientos “tradicionales” de enseñanza. Un canal que irá adquiriendo una importancia cada vez mayor, pues la utilización de la red será cada vez más importante a la hora de planificar toda la actividad educativa. En el caso de compatibilizar la utilización del material virtual con la enseñanza presencial, estaremos ante un nuevo concepto que, en nuestra opinión, está llamado a jugar un papel esencial en los próximos años: el denominado b-learning, concepto cada vez más difundido en los ámbitos docentes.

Se hace necesario por tanto, prácticamente imprescindible, disponer de un material de calidad, flexible en su utilización y que pueda servir tanto a los profesores, como a los alumnos a la hora de planificar y buscar conocimientos de forma autónoma. Con esta filosofía nace nuestra propuesta.

Muchas son las experiencias en este sentido. Sólo comentaremos algunas en las cuales han participado los autores de este trabajo y que, en cierta medida, constituyen la fuente de nuestra propuesta.

En primer lugar los últimos libros de matemáticas que hemos escrito [1], [2] [3], llevan incorporado un CD en el que se usan diversos CAS. Nuestra filosofía general ha sido poner de manifiesto la posibilidad de usar CAS para la enseñanza de las matemáticas. Consideramos que el CAS elegido no es importante y de hecho nosotros hemos utilizado indistintamente DERIVE, Mathematica y Maple. Algunas de nuestras experiencias con el uso de los paquetes de software pueden verse en [4], [5], [6].

Bajo los auspicios de la Unión Europea debemos mencionar dos proyectos dentro del programa Leonardo da Vinci:

El proyecto *Xmath*, [7] en el que se ha diseñado un curso de Cálculo I con estructura modular. Cada módulo contiene teoría, ejercicios, test, problemas, misceláneas, puzzles, etc. y enlaces a páginas web que se han considerado de interés. Se ha elaborado un curso piloto (*Xmath Pilot Course*). Se ha realizado una evaluación de este curso y las respuestas de los estudiantes, noruegos, eslovacos y españoles, han sido bastante homogéneas. En general consideran el curso interesante como refuerzo de la asignatura y aprecian los diferentes niveles de

profundidad de la materia. Las principales críticas se dirigen al diseño de la página web y a los enlaces utilizados en dicho curso.

El proyecto *dMath* [8], [9] en el que se ha creado una base de datos europea de módulos matemáticos de e-learning. Los módulos se organizan de acuerdo con los niveles estándar de los libros de texto y un módulo se divide en diferentes objetos independientes para la descarga por un editor. El editor (profesor, tutor, etc.) puede utilizar este material de diferentes maneras en los cursos de matemáticas. Los principales grupos destinatarios son los alumnos y profesores de las escuelas de ingeniería y las empresas industriales que quieren dar a los empleados formación continua. La base de datos puede ser utilizada como un diccionario de matemáticas y es evolutiva, en el sentido de que el personal autorizado puede incorporar nuevos módulos matemáticos. Además se ha desarrollado un calculador on-line, *XmathCalculator*, al que se puede acceder desde la página principal de [8], basado en la tecnología webMathematica. Con este calculador es posible, hasta ahora, trabajar con conceptos relacionados con Álgebra, Álgebra lineal, Funciones de una y varias variables, Ecuaciones diferenciales y Estadística. XMath Calculador permite realizar ejercicios paso a paso y puede utilizarse como calculadora avanzada.

### 3. UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA DEL CÁLCULO EN UNA VARIABLE PARA ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

Teniendo en cuenta las consideraciones expuestas en el apartado anterior hemos elaborado un curso de Cálculo en una variable para estudiantes de ingeniería en el que hemos intentado conjugar de forma armónica la enseñanza tradicional y el uso de las nuevas tecnologías, en un sentido amplio.

Para la elaboración del curso se han tenido en cuenta múltiples consideraciones de las cuales queremos destacar:

- El bajo nivel de conocimientos y un nulo hábito de estudio de gran parte de los estudiantes españoles en la enseñanza secundaria, lo que supone un condicionante importante en el diseño de la asignatura. (Por este motivo, muchas Universidades organizan, durante unas semanas previas al inicio del curso, cursos en los que se “refrescan” conocimientos de la enseñanza secundaria.)

- Un “interés y soltura” en el uso del ordenador (probablemente para otras tareas que no sean las de aprendizaje de las matemáticas).

- Los alumnos son “usuarios de la matemática”. Por ello, en la medida de lo posible, debemos suministrarles contenidos matemáticos que vayan a ser utilizados posteriormente en asignaturas tecnológicas.

- Se debe diseñar una carga razonable de trabajo y tener en cuenta que nuestra asignatura es una más, no la única ni la más importante para estos estudiantes.

Proponemos por ello un curso de cálculo en una variable en el que la enseñanza en dicho curso se compone de:

**a)** Clases tradicionales, para las cuales los estudiantes disponen de un libro de texto [3], que ha sido escrito por los autores de esta comunicación conjuntamente con profesores de otras Universidades españolas. Este texto contiene una información y material mayor del que necesitan los alumnos. El libro contiene los tópicos correspondientes a un curso estándar de Cálculo en una variable: Números reales y complejos, funciones elementales, límites y continuidad, derivabilidad y sus aplicaciones, integral de Riemann e integrales impropias.

También se ha escrito una segunda parte con inclusión de diversos aspectos de Cálculo Numérico: Resolución de ecuaciones no lineales, interpolación, integración numérica y resolución numérica de ecuaciones diferenciales. Los capítulos del libro empiezan con un resumen teórico. Se propone después un test de autoevaluación para continuar con una colección de problemas resueltos, ordenados en orden cronológico de contenidos y de dificultad creciente y acaba con una colección de problemas propuestos.

Para seguir estas clases y proporcionar una guía del trabajo personal del estudiante se les suministran unas hojas de trabajo en las que se exponen los objetivos, la tarea a realizar en clase y un boceto del posible trabajo en casa y los capítulos del libro de texto a los que corresponde el tema en cuestión. Para los alumnos avanzados se suministran tareas adicionales de mayor dificultad.

La información está accesible a los alumnos de la asignatura a través de la intranet de la Universidad. Para acceder a ella es necesario registrarse como usuario y adquirir una contraseña.

**b)** Uso de paquetes de software: Se ha elegido el programa DERIVE por su simplicidad. A los alumnos se les da una breve introducción (una hora) sobre el manejo del programa. También se les suministra un manual simplificado de uso. Se han realizado tutoriales, usando el programa DERIVE, que aparecen en el CD, que acompaña al libro de texto, que pretendemos que complementen el aprendizaje del alumno y que son usados por éstos libremente. Los profesores pueden, esporádicamente, usar DERIVE en las clases tradicionales para reforzar conocimientos. Por ejemplo en las figuras 1 y 2 pueden verse un ejemplo de sucesión no convergente y la aproximación de los polinomios de Taylor de una función.

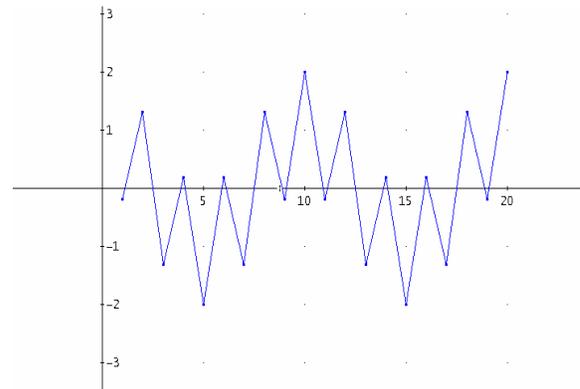


Figura 1

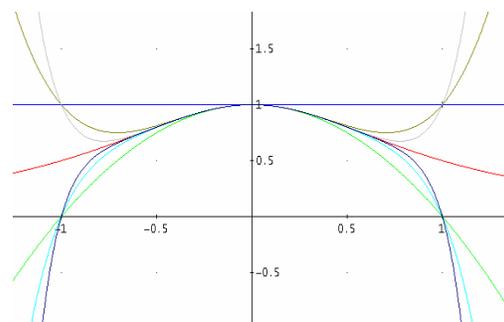


Figura 2

Los autores han resuelto con DERIVE la mayoría de los problemas propuestos en el libro de texto. Es necesario recalcar

que el uso de un CAS ofrece distintas alternativas para resolver determinados problemas. Por ejemplo el cálculo de límites es “ciego” con un CAS, pues se reduce a pulsar un botón y obtener, probablemente, la respuesta. Y para acotar una función de expresión analítica complicada se puede recurrir a la representación gráfica. Así en la figura 3 se observa que la

función, cuya expresión analítica es  $x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-3}\right)e^x$  tiene por ejemplo a  $-2$  como cota inferior en el intervalo  $[-1, 1]$ .

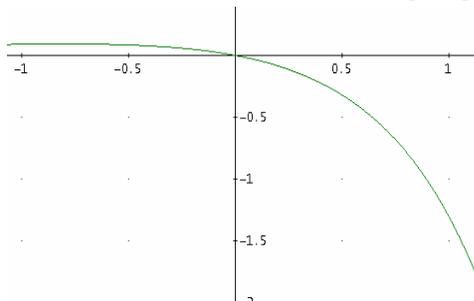


Figura 3

La elección del software no es determinante. Se podría utilizar un CAS similar a DERIVE, por ejemplo wxMaxima o el incipiente TI-Nspire. Incluso en determinadas parcelas, fundamentalmente Cálculo Numérico, se han usado además otros CAS de mayor potencia. En el CD se han incluido algunos ficheros sobre el uso de Mathematica para resolver problemas de resolución de ecuaciones no lineales, interpolación, resolución numérica de ecuaciones diferenciales y cálculo de polinomios de Taylor. Incluso

c) Webs seleccionadas por los profesores: Como complemento a la información anterior se les suministran a los alumnos direcciones web con algún aspecto interesante. Por ejemplo:

- Se les invita a visitar la página del proyecto *XMath* [7] antes mencionado.
- Se sugieren determinados applets de JAVA que ilustran gráficamente conceptos de la asignatura (por ejemplo la tangente como límite de las secantes, véase [10])
- Se seleccionan páginas que permiten efectuar cálculos on-line, para que los alumnos puedan practicar, véase [11].
- Se seleccionan páginas que son “libros electrónicos” [12] y se escogen algunas páginas de curiosidades, por ejemplo que el número  $e$  es irracional [13], etc.

La información detallada de la estructura del curso puede obtenerse a partir de la web de la Universidad Pontificia Comillas [14], con la correspondiente autorización.

d) Una propuesta innovadora de asistencia tutorial: los Centros de Matemáticas.

Una parte importante del éxito de nuestra propuesta metodológica radica en la necesidad de proporcionar una asistencia técnica a nuestros alumnos. Esta asistencia ha de ser distinta de la que, por diferentes razones, tienen en la actualidad. En este sentido, habría que englobar dentro de nuestro curso las actividades de los Centros de Matemáticas, que ya han empezado a funcionar bajo el paraguas de distintos proyectos europeos, como el proyecto EVLM [15].

En los Centros de Matemáticas los alumnos reciben asistencia técnica por parte de distintos profesores, vinculados a diferentes Departamentos docentes, tanto de manera presencial (acudiendo físicamente a la sede del centro) como on-line. Las consultas realizadas cubren todos los aspectos solicitados por el alumno y no se limitan a los contenidos de las asignaturas

universitarias. De esta manera se le proporciona al alumno un sitio de referencia al que acudir para rellenar las lagunas en su formación matemática, así como para orientarle en la mejor forma de enfocar sus estudios de ingeniería.

#### 4. A MODO DE CONCLUSIÓN

Aunque ante la nueva situación administrativa el papel del profesor cambie de manera esencial, al menos en España, estamos convencidos que el profesor debe seguir jugando un papel esencial en el proceso educativo diseñando la estrategia a seguir y permitiendo que con un uso equilibrado del libro de texto, los CAS, webs y tutorías (presenciales y on-line) los alumnos saquen el máximo rendimiento del tiempo empleado en el estudio de los tópicos involucrados en la asignatura. Creemos que nuestra propuesta es un paso en la dirección adecuada.

#### 5. REFERENCIAS

- [1] GARCÍA, A.-LÓPEZ, A.-RODRÍGUEZ, G.-ROMERO, S.-VILLA, A. de la: CÁLCULO II: Teoría y problemas de funciones de varias variables. Segunda edición. 648 páginas. Contiene CD. Editorial CLAGSA. Madrid. Julio 2002. ISBN: 84-921847-5-2.
- [2] GARCÍA, A.-GARCÍA, F.-LÓPEZ, A.-RODRÍGUEZ, G.-VILLA, A. de la: Ecuaciones diferenciales ordinarias: teoría y problemas: 432 páginas. Contiene CD. Editorial CLAGSA. Madrid. Junio 2006. ISBN: 84-921847-7-9.
- [3] GARCÍA, A.-GARCÍA, F.-LÓPEZ, A.-RODRÍGUEZ, G.-VILLA, A. de la: CÁLCULO I: Teoría y problemas de Análisis Matemático en una variable. Tercera edición. 688 páginas. Contiene CD. Editorial CLAGSA. Madrid. Noviembre 2007. ISBN 978-84-921847-2-9.
- [4] FRANCO, A.-FRANCO, P.-GARCÍA, A.-GARCÍA, F.-GONZÁLEZ, F.J.-HOYA, S.-RODRÍGUEZ, G.-VILLA, A. de la: "Learning Calculus of Several Variables with New Technologies". *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 2000. Volumen 7, número 4. Páginas 295-309.
- [5] ALONSO, F.-GARCÍA, A.-GARCÍA, F.-HOYA, S.-RODRÍGUEZ, G.-VILLA, A. de la: "Some unexpected results using computer algebra systems". *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 2001. Volumen 8, número 3. Páginas 239-252.
- [6] GARCÍA, A.-GARCÍA, F.-RODRÍGUEZ, G.-VILLA, A. de la: "A course of ODE with a CAS". *Proceedings del Congreso: Technology and its Integration in Mathematics Education*. TIME-2004. Montreal (Canadá), Julio 2004. Publicación electrónica. La información del congreso puede verse en la página <http://time-2004.etsmtl.ca/>
- [7] <http://dmath.hibu.no/xmath/>
- [8] <http://dmath.hibu.no/main.htm>
- [9] MARTÍN; A.-RODRÍGUEZ, G.-VILLA, A. de la: Facing the challenges of the european higher education area: The dmath project. LNCS. Volumen 4739. Páginas 368-375. Diciembre 2007.
- [10] <http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/2/>
- [11] <http://cow.math.temple.edu/>
- [12] <http://pirate.shu.edu/projects/reals/cont/index.html>
- [13] <http://mathforum.org/isaac/problems/eproof.html>
- [14] <http://www.upcomillas.es/>
- [15] <http://evlmspain.usal.es/>