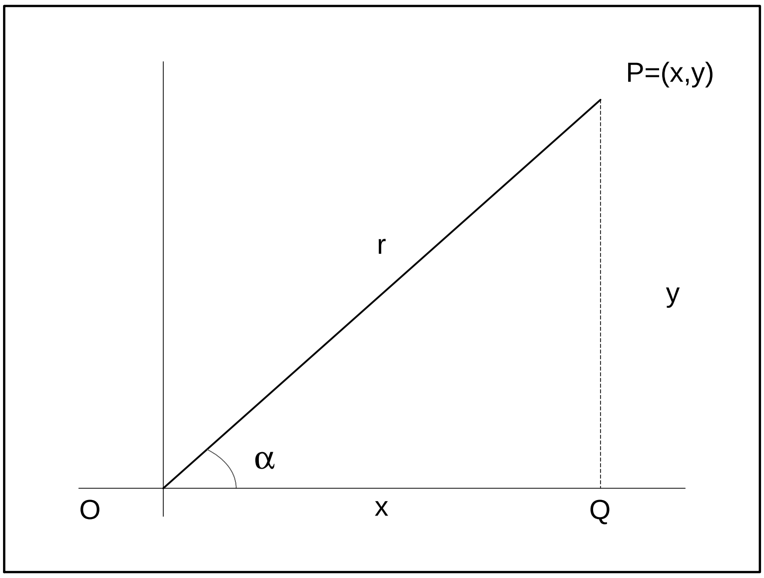
Razones trigonométricas y relaciones entre ellas

Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo

Dado el triángulo rectángulo OPQ de la gráfica siguiente,



se define:

- **Seno:** $\mathrm{sen}(\alpha) = \dfrac{y}{r} = \dfrac{PQ}{r}$, es el cociente entre la longitud del cateto opuesto al ángulo α y la longitud de la hipotenusa.
- **Coseno:** $\mathrm{sen}(\alpha) = \dfrac{x}{r} = \dfrac{OQ}{r}$, es el cociente entre la longitud del cateto contiguo al ángulo α y la longitud de la hipotenusa.
- **Tangente:** $\tan(\alpha) = \dfrac{y}{x} = \dfrac{PQ}{OP}$, es el cociente entre la longitud del cateto opuesto al ángulo α y la longitud del cateto adyacente o contiguo.

Otras razones trigonométricas:

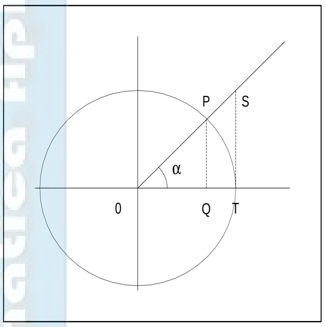
$$\mathrm{cosec}(\alpha) = \frac{1}{\mathrm{sen}(\alpha)} \qquad \sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)} \qquad \cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$$

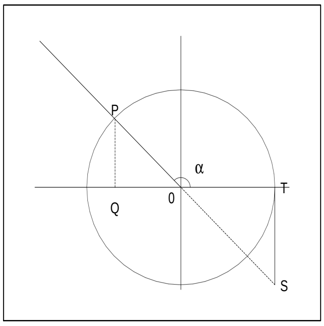
Razones trigonométricas en la circunferencia unidad

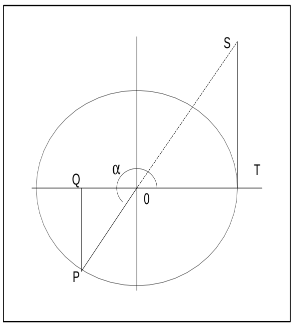
Si se dibuja una circunferencia de radio unidad, la longitud de algunos segmentos que se pueden dibujar sobre ella coincide con el valor de las razones trigonométricas de un ángulo.

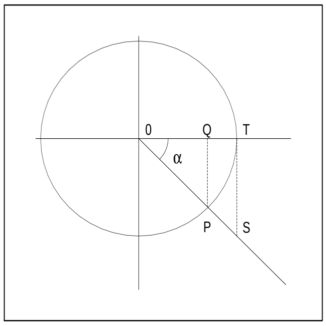
A continuación, se muestra, sobre la circunferencia de radio unidad, la representación del seno, el coseno y la tangente de un ángulo situado en cada uno de los cuatro cuadrantes:

a) Primer cuadrante b) Segundo cuadrante c) Tercer cuadrante d) Cuarto cuadrante









a) Primer cuadrante	b) Segundo cuadrante	c) Tercer cuadrante	d) Cuarto cuadrante
$\text{sen}(\alpha) = PQ \quad (+)$	$\text{sen}(\alpha) = PQ \quad (+)$	$\text{sen}(\alpha) = PQ \quad (-)$	$\text{sen}(\alpha) = PQ \quad (-)$
$\cos(\alpha) = OQ \quad (+)$	$\cos(\alpha) = OQ \quad (-)$	$\cos(\alpha) = OQ \quad (-)$	$\cos(\alpha) = OQ \quad (+)$
$\tan(\alpha) = ST \quad (+)$	$\tan(\alpha) = ST \quad (-)$	$\tan(\alpha) = ST \quad (+)$	$\tan(\alpha) = ST \quad (-)$

Nota: el signo que aparece a la derecha indica el signo de la razón correspondiente para ángulos situados en ese cuadrante, que depende del signo de la abscisa x y de la ordenada y, ya que el radio siempre se considera positivo.

Razones trigonométricas de algunos ángulos conocidos

Con las definiciones dadas es fácil comprobar los datos de la siguiente tabla:

ángulo	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$

Nota: Observa que los ángulos están expresados en radianes.
π radianes equivalen a 180º, así $\dfrac{\pi}{6}$ son 30º, $\dfrac{\pi}{4}$ son 45º, etc.

Relaciones entre las razones trigonométricas

Las razones trigonométricas de un ángulo no son independientes sino que están relacionadas entre sí.

Relaciones fundamentales:

- $\text{sen}(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$
- $\tan(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$

Estas relaciones permiten conocer el seno, coseno y tangente de un ángulo a partir del conocimiento de uno de ellos siempre que se sepa en qué cuadrante se encuentra el ángulo.

A partir de las relaciones anteriores se obtienen las siguientes, que también son útiles:

- $\sec(x)^2 = 1 + \tan(x)^2$
- $\operatorname{cosec}(x)^2 = 1 + \cot(x)^2$

A continuación enumeramos algunas relaciones entre las razones trigonométricas de ángulos cualesquiera con las de otros del primer cuadrante.

Relaciones entre las razones de ángulos cualesquiera con las de otros del primer cuadrante

1. Ángulos que se diferencian en un número entero de vueltas
(representados en la circunferencia unidad, o en cualquier circunferencia, los ángulos α y $\alpha + 2\,k\,\pi$, con k entero, son coincidentes, por tanto, sus razones son exactamente iguales):

- $\operatorname{sen}(\alpha + 2\,k\,\pi) = \operatorname{sen}(\alpha)$
- $\cos(\alpha + 2\,k\,\pi) = \cos(\alpha)$
- $\tan(\alpha + 2\,k\,\pi) = \tan(\alpha)$

2. Ángulos suplementarios (dos ángulos son suplementarios si suman π):

- $\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}(\alpha)$
- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$

3. Ángulos que difieren π:

- $\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha)$
- $\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$
- $\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$

4. Ángulos opuestos:

- $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha)$
- $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
- $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$

5. Ángulos complementarios (dos ángulos son complementarios si suman $\frac{\pi}{2}$):

- $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(\alpha)$
- $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \operatorname{sen}(\alpha)$
- $\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot(\alpha)$

Fórmulas trigonométricas

Fórmulas de adición

- Coseno del ángulo suma: $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$
- Seno de la suma: $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a)$
- Tangente de la suma: $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$

Nota: Observa que de estas fórmulas sólo necesitas recordar las dos primeras pues la de la tangente se puede obtener dividiendo la del seno por la del coseno. Las fórmulas correspondientes del ángulo diferencia se pueden obtener teniendo en cuenta que $a-b = a+(-b)$.

Fórmulas de ángulo doble

Si en las fórmulas de las razones del ángulo suma se pone $b = a$ se obtienen las siguientes fórmulas:

- Coseno de ángulo doble: $\cos(2\,a) = \cos(a)^2 - \operatorname{sen}(a)^2$
- Seno del ángulo doble: $\operatorname{sen}(2\,a) = 2\operatorname{sen}(a)\cos(a)$
- Tangente del ángulo doble: $\tan(2\,a) = \dfrac{2\tan(a)}{1+\tan(a)^2}$