Repaso de Límites de funciones elementales

Polinomios y funciones racionales (válido para $x \to \pm\infty$):

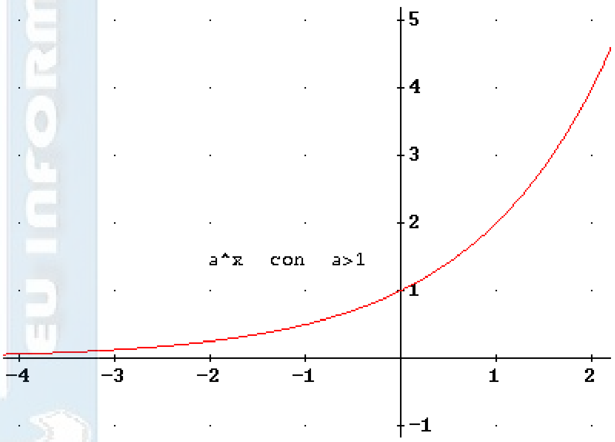
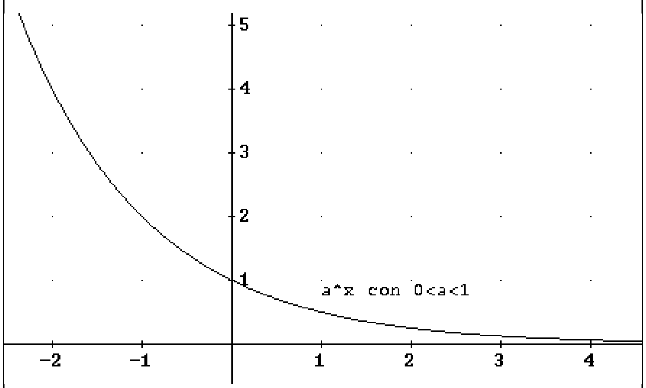
$$\lim_{x\to\infty} x^p = \infty \ \text{ si } \ p>0; \quad \lim_{x\to\infty} x^p = 0 \ \text{ si } \ p<0; \quad \lim_{x\to\infty}\left(ax^n + bx^{n-1}+\ldots\right) \underset{\substack{\text{se elige el término}\\ \text{de mayor grado}}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to\infty}\left(ax^n\right) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^p = +\infty \ \text{ si } \ p>0 \text{ es par}; \quad \lim_{x\to-\infty} x^p = -\infty \ \text{ si } \ p>0 \text{ es impar};$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n+\ldots}{bx^m+\ldots} = \begin{cases} 0 & \text{si } n<m \\ \infty & \text{si } n>m \\ \dfrac{a}{b} & \text{si } n=m \end{cases}; \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[p]{ax^n+\ldots}}{\sqrt[q]{bx^m+\ldots}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{n}{p}<\frac{m}{q} \\ \infty & \text{si } \frac{n}{p}>\frac{m}{q} \\ \dfrac{\sqrt[p]{a}}{\sqrt[q]{b}} & \text{si } \frac{n}{p}=\frac{m}{q} \end{cases}$$

Idea básica: En límites de polinomios en el infinito, estudiaremos el comportamiento de los términos de MAYOR grado.

Exponenciales:

Si a>1:	**Si 0<a<1:**
$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$; $\lim_{x\to 0} a^x = 1$; $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$	$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$; $\lim_{x\to 0} a^x = 1$; $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$
	

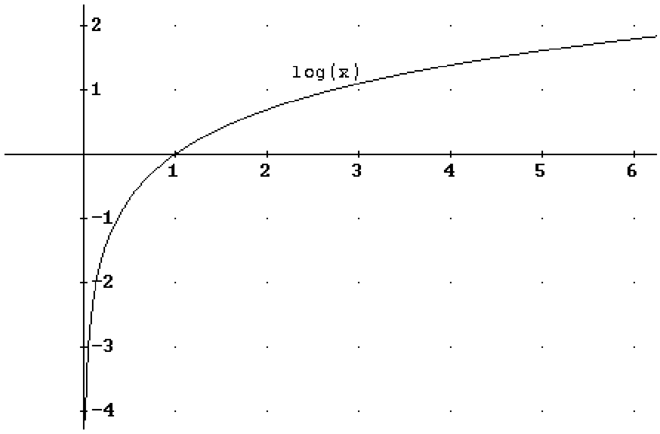
Propiedades de las exponenciales: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; $a^x / a^y = a^{x-y}$; $\left(a^x\right)^y = a^{x\cdot y}$; $e^{\ln(x)} = x$; $a^{\log_a(x)} = x$

Logaritmos:

$$\lim_{x\to 0^+} \log(x) = -\infty \; ; \; \lim_{x\to 1} \log(x) = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} \log(x) = +\infty$$

(válido para cualquier logaritmo con base mayor que 1: $\log_2(x)$, $\ln(x)$, $\log_{10}(x)$, ...)



Propiedades de los logaritmos:

$$\log(x\cdot y) = \log(x) + \log(y);$$

$$\log(x/y) = \log(x) - \log(y);\; \log(x^y) = y\log(x)$$

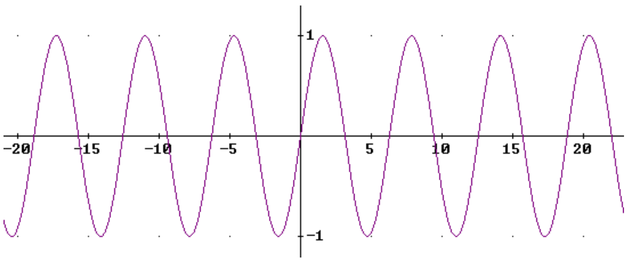
$$\ln(e^x) = x; \log_a(a^x) = x$$

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Trigonométricas:

No existen $\lim_{x\to\pm\infty} \sin x$ ni $\lim_{x\to\pm\infty} \cos x$

Sí se utilizará que son funciones acotadas: $|\sin x| \le 1 \quad y \quad |\cos x| \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$



Álgebra de límites finitos

Ver Proposición 2.2.8 (e) de la Guía Docente: Los límites conservan la suma, el producto, el cociente (excepto dividir por cero) y las exponenciales (base positiva).

Álgebra de límites infinitos

(a) Suma: $\infty + K \approx \infty$; $\infty - K \approx \infty$; $\infty + \infty \approx \infty$; $\infty - \infty$ Indeterminación

(b) Producto: si K≠0, $K \cdot \infty \approx \infty$; $\infty \cdot \infty \approx \infty$. Si K=0, $0 \cdot \infty$ Indeterminación

(c) Cociente: si K≠0, $\frac{K}{0}, \frac{\infty}{0}, \frac{\infty}{K} \approx \infty$; si K≠0, $\frac{0}{K}, \frac{0}{\infty}, \frac{K}{\infty} \approx 0$; $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ Indeterminación

(d) Potencias: Si b>0, $(+\infty)^b \approx \infty$. Si b<0, $(+\infty)^b \approx 0$. $1^\infty, 0^0, \infty^0$ Indeterminación.