Entrenamiento Matemático Sesión 10 (14 -Octubre-2010)

Cálculo elemental de Primitivas

GRUPO:

1. Función primitiva e integral indefinida

Dada una función *f:* **R**-->**R**, se dice que una función derivable *F* es **primitiva** de *f* si *F'=f.*
Es decir, primitivas de una función *f,* son aquellas funciones derivables *F* cuya derivada es *f.*
Dos funciones *F* y *G* son primitivas de una misma función *f* si y sólo si difieren en una constante.
El conjunto de todas las primitivas de una función *f* se denomina **integral indefinida** de *f(x),* y se representa:

$$\int f(x)\, dx = F(x)+C$$

$f(x)$ es el integrando.
x es la variable de integración (esto se indica poniendo dx al final de la expresión).
$F(x)$ es la primitiva ($F'=f$)
C es la constante de integración.

Ejemplo

Si $f(x) = 2x$:

$F(x) = x^2$ es una primitiva de *f.*

$F(x) = x^2 + 1$ es una primitiva de *f.*

$F(x) = x^2 + 2$ es una primitiva de *f.*

...

La integral indefinida es $\int 2x\, dx = x^2 + C$, que representa el conjunto de todas las primitivas de *f.*

Coloquialmente a las primitivas se les llama integrales de la función. Así diríamos: *"una integral de 2 x es x^2"*, y al conjunto de las primitivas se las llama integral general o simplemente integral de la función.

2. Integrales inmediatas

Por la propia definición de la integral, si nos fijamos en cualquier tabla de derivadas y la miramos de derecha a izquierda, obtendremos integrales (o primitivas) de algunas funciones elementales, y esas son las que se dice inmediatas.

Por ejemplo, como la derivada de $\sin(x)$ es $\cos(x)$, resulta $\int \cos(x)\, dx = \sin(x) + C$.

Ejercicio 3.1

Mirando la tabla de derivadas, determina primitivas en los siguientes casos

$$\int 5\, dx =$$

$$\int 2\, x\, dx =$$

$$\int 3\, x^2\, dx =$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx =$$

$$\int \mathbf{e}^x\, dx =$$

$$\int \cos(x)\, dx =$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx =$$

Tabla de integrales inmediatas

Consultando una tabla de derivadas se pueden dar algunas fórmulas de integrales inmediatas:

a) $\int a\, dx = ax + C$, siendo a una constante real.

b) $\int x^p\, dx = \frac{x^{(p+1)}}{p+1} + C,\ p \neq -1$

c) $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(|x|) + C$

d) $\int \mathbf{e}^x\, dx = \mathbf{e}^x + C$

e) $\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan(x) + C$

f) $\int \sin(x)\, dx = -\cos(x) + C$

g) $\int \cos(x)\, dx = \sin(x) + C$

h) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin(x) + C$

Nota: Para la fórmula del apartado c) hemos tenido en cuenta que $\ln(x)$ y $\ln(|x|)$ tienen la misma derivada ($1/x$), luego ambas son primitivas de esta función. Se diferencian en una constante. Hemos elegido $\ln(|x|)$ porque tiene mayor dominio.

Se pueden añadir más fórmulas:

Por ejemplo, teniendo en cuenta que la derivada de tan(x) es $\dfrac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2$,

podemos escribir: $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)^2}\, dx = \tan(x) + C$, o bien $\displaystyle\int 1 + \tan(x)^2\, dx = \tan(x) + C$

3. Propiedades

Las siguientes propiedades, denominadas **propiedades de linealidad**, se deducen de la propia definición y de las propiedades de las derivadas y nos ayudarán a localizar primitivas de algunas funciones.

1.- $\displaystyle\int (f+g)(x)\, dx = \int \mathrm{f}(x)\, dx + \int \mathrm{g}(x)\, dx$

2.- $\displaystyle\int \lambda\, \mathrm{f}(x)\, dx = \lambda \int \mathrm{f}(x)\, dx$ para cualquier número real λ.

Ejercicio

Usa las propiedades de linealidad y la tabla de integrales inmediatas para calcular integrales siguientes y comprueba, mediante derivación, los resultados obtenidos.

a) $\displaystyle\int x^5 + 4\, x^4 - \frac{3}{x} + \sin(x)\, dx.$

b) $\displaystyle\int \frac{x^6 + \sqrt{x}}{x}\, dx$.

c) $\displaystyle\int 3 + \cos(x) + \frac{4}{1+x^2}\, dx$.

4. Métodos generales de obtención de primitivas

Cambio de variable

Recordemos que para derivar una función compuesta se usa la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{f}(\mathrm{g}(x)) = \mathrm{f}\,'(\mathrm{g}(x))\cdot\mathrm{g}'(x)$$

De aquí podemos deducir que $\int \mathrm{f}\,'(\mathrm{g}(x))\cdot\mathrm{g}'(x)\,dx = \mathrm{f}(\mathrm{g}(x)) + C$

Lo que nos permite hallar la integral de una composición de funciones siempre que en el integrando aparezca la derivada de g(x).

Si g'(x) es una constante no hay ningun problema, porque se puede multiplicar y dividir por ella. Por ejemplo, para calcular $\int \cos(2\,x)\,dx$ podemos intentar usar la fórmula anterior, con $\mathrm{g}(x) = 2\,x$, pero necesitamos que aparezca en el integrando g'(x). Entonces hacemos:

$$\int \cos(2\,x)\,dx = \frac{1}{2}\int 2\cos(2\,x)\,dx = \frac{1}{2}\sin(2\,x) + C$$

Podemos generalizar este proceso: Para hallar $\int \mathrm{f}(x)\,dx$, en ocasiones podemos realizar un cambio de variable $x = \mathrm{g}(u)$ => $dx = \mathrm{g}'(u)\,du$ => $\int \mathrm{f}(x)\,dx = \int \mathrm{f}(\mathrm{g}(u))\,\mathrm{g}'(u)\,du$, y hallar ahora una primitiva de la función resultante.

Ejemplo

Vamos a calcular $\displaystyle\int \frac{1}{1+(3\,x+1)^2}\,dx$:

Si en lugar de $3\,x+1$ tuvieramos x, la integral sería inmediata (arco tangente). Esto sugiere hacer el cambio de variable $3\,x+1 = u$ y entonces $3\,dx = du$, con lo que podemos escribir la integral anterior de la forma:

$$\left(\frac{1}{3}\right)\left(\int \frac{1}{1+u^2}\,du\right) = \frac{\arctan(u)}{3} + C = \frac{\arctan(3\,x+1)}{3} + C$$

A continuación se muestra una tabla de integrales de uso frecuente, que se obtiene a partir de usar la regla de la cadena en derivadas elementales:

a) $\displaystyle\int \mathrm{f}(x)^p\,\mathrm{f}\,'(x)\,dx = \frac{\mathrm{f}(x)^{(p+1)}}{p+1} + C\ ,\ p \neq -1$

b) $\displaystyle\int \mathbf{e}^{\mathrm{f}(x)}\,\mathrm{f}\,'(x)\,dx = \mathbf{e}^{\mathrm{f}(x)} + C$

c) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln(|f(x)|) + C$

d) $\displaystyle\int \sin(f(x))\, f'(x)\, dx = -\cos(f(x)) + C$

e) $\displaystyle\int \cos(f(x))\, f'(x)\, dx = \sin(f(x)) + C$

f) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{1 + f(x)^2}\, dx = \arctan(f(x)) + C$

i) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}\, dx = \arcsin(f(x)) + C$

Ejercicio

Escribe las integrales anteriores poniendo $f(x) = (x + 1)^2$.

Ejercicio

Calcula las siguientes integrales.

Observa que las dos primeras se parecen a las integrales $\sin(x)$ y x^n, y las dos últimas se relacionan con la derivada de un logaritmo, ya que en el numerador del integrando está, salvo constantes, la derivada del denominador.

a) $\displaystyle\int \sin(a\,x)\, dx,\ con\ a \neq 0$

b) $\int (2\,x+5)^3\,dx$.

c) $\int \frac{1}{x+5}\,dx$

d) $\int \frac{a\cos(x)}{\sin(x)}\,dx,\ con\ a \neq 0$

Ejercicio

Calcula, ahora sin pistas, las integrales siguientes:

a) $\int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$

b) $\int \cos(3\,x)\,\mathbf{e}^{\sin(3\,x)}\,dx$

\>

c) $\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$