Entrenamiento matemático.   Hoja AL4

EU Informática
UPM

Apellidos:

Nombre:

Grupo:

Dpto. MA
GIEMATIC [1]

Matrices I   (Álgebra)

a) Se consideran las matrices $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ y $C = (c_{ij})$ siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & x \\ 4 & 2 \\ y & z \end{pmatrix}$$

1. Determinar, si existen, los elementos

a_{11} $\boxed{}$ a_{31} $\boxed{}$ a_{13} $\boxed{}$ b_{22} $\boxed{}$ c_{12} $\boxed{}$ c_{33} $\boxed{}$

2. Calcular

$$A + B = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix} \qquad 2A - B = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix} \qquad A - \lambda B = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

3. Estudiar si es posible obtener x, y y z para que $C = A$ o para que $C = B$:

b) Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Escribir las matrices traspuestas de A, B, C y D.

$A^t =$ $B^t =$ $C^t =$ $D^t =$

2. Calcular $A \cdot B$, $B \cdot C$, $D \cdot B$, A^2

[1] Grupo de Innovación Educativa GIEMATIC: José J. Carreño, Jesús García, Ana Lías, Ángeles Martínez.

c) Escribir las matrices identidad de orden 2 y de orden 3, I_2 e I_3.

d) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, calcular A^2, A^3 y dar la forma general de A^n, $n \in \mathbb{N}$.

e) Se dice que A^{-1} es la matriz inversa de A, una matriz cuadrada de orden n, si se cumple que

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Estudiar si los siguientes pares de matrices son inversas:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$:

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$:

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$:

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-23}{5} & \frac{22}{5} \\ \frac{-48}{5} & \frac{44}{5} & \frac{-41}{5} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$:

f) Hallar el determinante de las siguientes matrices

$a)\ |A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} =$

$b)\ |B| = \begin{vmatrix} 3 & 1/4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$

$d)\ |D| = \begin{vmatrix} 1/2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1/2 \\ 2 & 1/2 & 1 \end{vmatrix} =$

$d)\ |E| = \begin{vmatrix} \cos(x) & \mathrm{sen}(x) & 1 \\ \mathrm{sen}(x) & \cos(x) & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$

g) Comprobar las siguientes propiedades de los determinantes

1. $\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & y \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & y \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$

3. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

h) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -12 & -5 \end{pmatrix}$,

1. Obtener la matriz $A - \lambda I_2$

2. Obtener el determinante de la matriz anterior, $|A - \lambda I_2|$

3. Factorizar el polinomio de grado 2 en λ obtenido en el apartado anterior.

i) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Obtener la matriz $A - \lambda I_3$

2. Obtener el determinante de la matriz anterior, $|A - \lambda I_3|$

3. Factorizar el polinomio de grado 3 en λ obtenido en el apartado anterior.

j) Piensa y resuelve:

1. Sea $A = \begin{pmatrix} x & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Hallar x para que $A \cdot A^t$ sea diagonal.

2. Dadas $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

1) Comprobar que $A \cdot B \neq B \cdot A$.

2) Calcular $(A+B)^2$ y estudiar si $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2A \cdot B$.

3) Calcular $(A+B)(A-B)$ y estudiar si $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.